OPERADORES LINEALES ACOTADOS: TAREA 12

1. (Tma. fundamental del cálculo.) Sean $I := [a, b]$ un intervalo, $f \in C(I, X)$ y $F : I \to X$. Si $F'(t) = f(t), \forall\, t \in I$, prueba que $\int_a^b f(s)ds = F(b) - F(a)$.

2. Sean X y Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal. Si existen $C > 0$ y $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ tal que $\|Tx\| \leq C\|Kx\|$, $\forall\, x \in X$, prueba que T es compacto.

3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $K : [a, b]^2 \to \mathbb{K}$ una función continua. Prueba que T_K, el operador lineal con núcleo K, es un operador compacto de $C[a, b]$ en $C[a, b]$

Definición Sea H un espacio de Hilbert separable. Un operador $T \in \mathcal{L}(H)$ es de *Hilbert-Schmidt*, si H tiene una base ortonormal $\{e_n : n \in N\}$ tal que $\sum_{n\in N} \|Te_n\|^2 < \infty$.

4. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ es de Hilbert-Schmidt, prueba que T es compacto.

5. Sea X un espacio normado. Si $P \in \mathcal{L}(X)$ es una proyección, prueba que P' también lo es y encuentra $R(P')$.

6. Si $P \in \mathcal{L}(X)$ es una proyección, encuentra $\sigma(P)$.

7. Sea $X := \ell^1$ y considera $T(x_1, \ldots, x_n, \ldots) := (x_1, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots)$. Observa que $T \in \mathcal{L}(X)$ y prueba que $\alpha(T) \neq \beta(T')$.

8. Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Si $X = V \oplus W$ y T es 1-1 en V, prueba que $\alpha(T) \leq \dim V$.

9. Si $T \in F(X)$, prueba que $\sigma(F)$ es finito.

10. Sean $p \in [1, \infty]$, $X := \ell^p$, $\{a_n\} \subset \mathbb{K}$ una sucesión acotada y $T \in \mathcal{L}(X)$ definido por $T\{x_n\} := \{a_n x_n\}$. Si T es compacto, prueba que $a_n \to 0$.

11. Sean $T \in \mathcal{L}(X)$. Si $V \subset X$ es un subespacio invariante bajo T y $x \in V$, prueba que V contiene al espacio generado por los iterados $T^n x, n = 0, 1, \ldots$.

12. Sean $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ y $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$. Si $A = (a_{i,j})$ es la matriz de T respecto de $\mathcal{B}$, prueba que la matriz de T^* respecto de esa misma base es $B = (b_{i,j})$, donde $b_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$.

Para revisar y entregarse el lunes 11 de noviembre, 2013