OPERADORES LINEALES ACOTADOS: TAREA 13

1. Sean V un espacio vectorial y $T : V \to V$ una función tal que para cada $x \neq 0$, existe $\lambda(x) \neq 0$ tal que $Tx = \lambda(x)\,x$. Si T es lineal, prueba que $Tx = c\,x, \forall\, x \in X$.

En seguida X y Y son espacios de Banach y H un espacio de Hilbert.

2. Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Si $f \in E := \overline{\mathrm{Esc}([a,b],X)}$, prueba que $Tf \in \overline{\mathrm{Esc}([a,b],Y)}$ y $T\int_a^b f(s)ds = \int_a^b (Tf)(s)ds$.

Definición Sean X y Y espacios de Banach. Dados $s := \{a_n\} \in \ell^1, \{\varphi_n\} \subset B_{X^*}$ y $\{y_n\} \subset B_Y$, a $T := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y_n \otimes \varphi_n)$ le llamaremos *operador nuclear.*

3. Prueba que un operador nuclear: i) Está bien definido. ii) Es compacto.

4. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto no-vacío. Prueba que la inclusión de $C^1(I)$ en $C(I)$ es compacta ($\|f\|_{C^1} := \text{máx}\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$.).

5. Sean X un espacio normado, $T \in \mathcal{L}(X)$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $T^{n+1} = T^n$, prueba que $X = N(T^n) \oplus R(T^n)$.

6. Prueba que $\Phi_+(X,Y)$ es un conjunto abierto.

7. Sean X un espacio normado, $T \in \mathcal{L}(X)$ y V un subespacio de X. Si V es invariante bajo T, prueba que $V^\perp \subset X^*$ lo es bajo T'.

8. Sea H un espacio de Hilbert real. Si $T \in \mathcal{L}(H)$, prueba que $(T_\mathbb{C})^* = (T^*)_\mathbb{C}$.

9. Sean $T \in \mathcal{L}(H)$ y $R(T,\lambda) := (T - \lambda I)^{-1}$, $\forall\,\lambda \in \rho(T)$. Prueba que $R(T,\mu)^* = R(T^*, \overline{\mu}), \forall\,\mu \in \rho(T)$.

10. Prueba que $I + T^*T$ es invertible, $\forall\, T \in \mathcal{L}(H)$.

11. Sean $H := \ell^2(\mathbb{C}), s := \{a_n\} \in \ell^\infty$ y $M_s : H \to H$ el operador definido por $M_s(\{b_n\}) := \{a_n b_n\}$. i) Verifica que $(M_s)^* = M_{\overline{s}}$. ii) Concluye que M_s es autoadjunto si, y sólo si, s es real.

12. Si $T \in \mathcal{L}(H)$, prueba que su función cuadrática es continua.

Para revisar y entregarse el lunes 18 de noviembre, 2013