OPERADORES LINEALES ACOTADOS: TAREA 14

1. Sean X un espacio normado y $T : X \to X$ un operador lineal. Si $TS = ST, \forall\, S \in \mathcal{L}(X)$, prueba que $T = \lambda I$, para algún $\lambda \in \mathbb{K}$. (Sug.: considera operadores S que sean “sencillos”.)

Definición Sean X un espacio de Banach complejo, $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva de clase C^1, $\alpha^* := R(\alpha) \subset \mathbb{C}$ y $f \in C(\alpha^*, X)$. La *integral de (Cauchy de) f a lo largo de α* (o sobre α) es $\int_\alpha f(z)dz := \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)dt$.

2. Sea X un espacio de Banach complejo. Dados $n \in \mathbb{N}$ y $\{T_j : j = 0, \ldots, n\} \subset \mathcal{L}(X)$, consideremos la función $P : \mathbb{C} \to X$ definida por $P(\lambda) := \sum_{j=0}^{n} \lambda^j T_j$. Calcula $\int_\alpha P(z)dz \in \mathcal{L}(X)$, siendo $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), 0 \le t \le 2\pi$.

A continuación H es un espacio de Hilbert.

3. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ es un operador de Hilbert-Schmidt y $\{v_n\} \subset H$ es cualquier base ortonormal de H, prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} \|Tv_n\|^2 < \infty$.

4. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Supongamos que $V \subset H$ es un subespacio cerrado tal que $T(V) \subset V$ y tomemos $T_V := T : V \to V$. Prueba: i) Si T es autoadjunto, entonces T_V es autoadjunto. ii) En general, $(T_V)^* = PT^* : V \to V$, donde P es la proyección ortogonal de H sobre V.

5. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto. Prueba: i) e^T es autoadjunto. ii) e^{iT} es unitario.

6. Si $P \in \mathcal{L}(H)$ es una proyección y $\|P\| = 1$, prueba que P es una proyección ortogonal.

7. Sean $K \in \mathcal{K}(H), \{x_n\} \subset H$ y $x \in H$. Si $x_n \xrightarrow{w} x$, prueba que $\langle Kx_n, x_n\rangle \to \langle Kx, x\rangle$.

8. Encuentra $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ que no sea autoadjunto y cuyo espectro sea real.

9. Supongamos que $\dim H > 1$ y $T \in \mathcal{L}(H)$. Prueba: i) $W(T)$ es conexo. ii) Si T es autoadjunto, entonces $W(T)$ es un intervalo.

10. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ es normal y $R(T)$ es cerrado, prueba que $\alpha(T) = \beta(T)$.

11. Encuentra un espacio pre-Hilbert real H y $x, y \in H$ tales que $\sup\{\|(\cos\alpha)x + (\operatorname{sen}\alpha)y\| : 0 \le \alpha \le 2\pi\} \ne \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$.

12. Sean X y Y espacios de Banach y $V \subset X$ un subespacio. Si $T \in \mathcal{L}(V, Y)$ es una isometría, prueba que su extensión $\overline{T}$ a $\overline{V}$ también lo es.

Para revisar y entregarse el lunes 25 de noviembre, 2013