OPERADORES LINEALES ACOTADOS: TAREA 15

A continuación X es un espacio de Banach y H un espacio de Hilbert.

1. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Supongamos que V y W son subespacios de X que son invariantes bajo T y $X = V \oplus W$. Prueba que T es un isomorfismo si, y sólo si, lo son $T_V := T : V \to V$ y $T_W := T : W \to W$.

2. Sean $T \in \mathcal{L}(X)$ y $C := C_r \subset \mathbb{C}$, la circunferencia orientada positivamente, con centro en el origen y radio $r > 0$. Si $r > r_\sigma(T)$, demuestra que $T^m = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \lambda^m\,(T-\lambda I)^{-1} d\lambda,\ \forall\, m \in \mathbb{N}_0$.

3. Si $T, S \in \Phi^+(X,Y)$, donde Y también es un espacio de Banach, prueba que $ST \in \Phi^+(X,Y)$. (Sug.: Observa que $X = N(T) \oplus V_T \oplus (W_T \cap W_S)$ y $X = N(S) \oplus V_S \oplus (W_T \cap W_S)$, donde $\dim V_T < \infty$ y $\dim V_S < \infty$.)

4. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ es un operador de Hilbert-Schmidt, prueba que T^* también.

5. Sea $K \in \mathcal{K}(H)$. Si $\lambda \in \sigma_\pi(T) \setminus \{0\}$, prueba que $\overline{\lambda} \in \sigma_\pi(T^*)$.

6. Sea $\{v_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$ un sistema ortonormal y $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda \to 0$. Definamos $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, u_n\rangle u_n,\ \forall\, x \in H$. Prueba que T es compacto y autoadjunto.

7. Prueba la desigualdad de Schwarz para una forma sesquilineal positiva $b : V^2 \to \mathbb{K}$, esto es,

$$|\,b(x,y)| \leq\ b(x,x)^{\frac{1}{2}}\, b(y,y)^{\frac{1}{2}},\ \forall\, x, y \in V.$$

8. Si el espacio de Hilbert H es complejo y $T \in \mathcal{L}(H)$, demuestra que $\|T\| \leq 2r(T)$. (Sug.: considera la identidad de polarización.)

9. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Si T es un operador normal y $T^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$, prueba que $T = 0$.

10. Encuentra dos operadores normales cuya suma no sea normal.

11. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Si $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ es una función entera, prueba que la definición de $f(T)$ mediante el cálculo funcional coincide con la definición usando series de potencias.

12. Encuentra $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tal que $T^* \notin \mathcal{P}(T)$.

Para revisar y entregarse el lunes 2 de diciembre, 2013