PROPEDÉUTICO DE ANÁLISIS: TAREA 2

1. Supongamos que E es un conjunto y $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ es una colección de subconjuntos de E. Prueba que

$(\cap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \cup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$. En particular, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, si $A, B \subset E$.

Definición. Dado $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definamos

$$\|x\|_\infty := \text{máx}\{|x_j| : j = 1, \dots, n\}.$$

2. Prueba que $\| \cdot \|_\infty$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.

3. Sea X un espacio vectorial. Si $\| \cdot \|$ es una norma en X, prueba que

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|, \quad \forall\, x, y \in X.$$

4. Sean $A \subset \mathbb{R}^m$ y $B \subset \mathbb{R}^n$. Si A y B son cerrados, prueba que $A \times B \subset \mathbb{R}^{m+n}$ es cerrado.

5. Sea M un espacio métrico y $A \subset M$. Prueba que A es abierto y cerrado si, y sólo si, $\mathrm{Fr}A = \emptyset$.

Para entregarse el miércoles 22 de junio, 2016