PROPEDÉUTICO DE ANÁLISIS: TAREA 4

Definición. El conjunto ℓ^∞ consiste de todas las sucesiones reales $\{x_n\}$ que son acotadas, es decir, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq C, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Dada $x := \{x_n\} \in \ell^\infty$ definamos

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

1. Prueba que ℓ^∞ es un espacio vectorial y que $\|x\|_\infty$ es una norma en ℓ^∞.

Definición. Dada una función $f : D \to B$ y $A \subset B$ definimos

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\}.$$

2. Sea $f : D \to B$. Si $A_\alpha \subset D, \ \forall\, \alpha \in J$, prueba que $f(\cup_{\alpha\in J} = \cup_{\alpha\in J} f(A_\alpha)$.

3. Sea $\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la proyección sobre el eje x_j, esto es $\pi_j(x_1, \ldots, x_n) := x_j$, donde $j = 1, \ldots, n$. Prueba que π_j preserva abiertos.

4. Sean M y N espacios métricos. Si $f : M \to N$ es continua y $A \subset D$ es denso, prueba que $f(A)$ es denso en $f(M)$.

5. Sea X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Prueba que T es continuo si, y sólo si, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|, \ \ \forall\, x \in X$.

Definición. La *gráfica* de una función $f : D \to B$ es

$$G(f) := \{(x, f(x)) : x \in D\} \subset D \times B.$$

6. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ y $f : E \to \mathbb{R}^m$. Si f es continua y E es cerrado, prueba que su gráfica $G(f) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ es un conjunto cerrado.

Para entregarse el viernes 24 de junio, 2016.
El viernes también se llevará a cabo el examen de evaluación.