El Operador de Cesàro y sus Iterados

Fernando Galaz-Fontes

Departamento de Matemáticas
UAM-Iztapalapa (por año sabático),
CIMAT, Guanajuato (permanente).

Ernesto Cesàro 1859-1906

Resumen 1. *Dada una sucesión* $\{a_n\}$ *de escalares, el operador de Cesàro (o de promedios)* C *le asocia la sucesión* $\{b_n\}$*, donde* $b_n = \frac{a_0+\cdots+a_n}{n+1}$*,* $n = 0, 1, \ldots$*. En este trabajo se presentarán algunas de sus propiedades y consideraremos la sucesión de iterados* $\{C^k a\}$*.*

El Operador de Cesàro

A lo largo de este trabajo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $\mathcal{S}$ denotará el espacio vectorial formado por las sucesiones en $\mathbb{K}$. El n-ésimo término de $a \in \mathcal{S}$ siempre se denotará por a_n y en ocasiones también por $a(n)$.

Dada una sucesión $a \in \mathcal{S}$, denotemos por b la sucesión determinada por

$$b_n \equiv \frac{a_0 + \ldots + a_n}{n+1}, \ n = 0, 1, \ldots$$

y definamos $Ca = b$. Al operador $C : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ obtenido de esta forma lo llamaremos el *operador de Cesàro*. Es sencillo verificar que C es lineal.

Espacios Clásicos de Sucesiones

A continuación introduciremos los subespacios de $\mathcal{S}$ donde analizaremos el operador de Cesàro. Antes de esto es conveniente recordar que un espacio vectorial X (sobre $\mathbb{K}$) provisto de una norma $\|\cdot\|$ es un *espacio de Banach*, si es completo bajo esta norma.

Los siguientes subespacios de $\mathcal{S}$, con las normas que se indican, son espacios de Banach [4, Section 1.5].

1) $\ell^\infty \equiv \{a \in \mathcal{S} : a \text{ es acotada}\}$,
$\|a\|_\infty \equiv \sup\{|a_n|: n = 0, 1, \ldots\}$.

2) $c \equiv \{a \in \mathcal{S} : a \text{ es convergente}\}$.
Como c es un subespacio de ℓ^∞, en c consideramos la norma $\|\cdot\|_\infty$.

3) $c_0 \equiv \{a \in c : a \text{ converge a } 0\}$
Naturalmente, siendo c_0 un subespacio de c también tiene la norma $\|\cdot\|_\infty$.

4) Sea $1 \le p < \infty$. Entonces,
$\ell^p \equiv \{s \in \mathcal{S} : \|s\|_p < \infty\}$,
$\|s\|_p \equiv (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Comportamiento en Estos Espacios

Nos interesa ahora describir el comportamiento de C en los espacios clde sucesiones.

Definición 1. Sean X y Y espacios normados y $S : X \to Y$ un operador lineal. La *norma* de S es

$$\|S\| \equiv \sup\{\|Tx\| : \|x\| \le 1\}.$$

Cuando $\|S\| < \infty$, se dice que el operador lineal S es *acotado*. Esto equivale a que S sea continuo [4, Section 2.7].

Notación En lo que resta del trabajo, C, C_c, C_0 y C_p indicarán la restricción del operador de Cesàro a ℓ^∞, c, c_0 y ℓ^p, respectivamente.

Teorema 1 (Cesàro, 1890).
i) $C(\ell^\infty) \subset \ell^\infty$ *y* $\|C\| = 1$.

ii) $C(c) \subset c$ *y* $\lim Ca = \lim a$, $\forall\, a \in c$. *Además,* $\|C_c\| = 1$.

iii) $C(c_0) \subset c_o$ *y* $\|C_0\| = 1$.

Demostración. i) Sea $a \in \ell^\infty$ y $b = Ca$. Entonces

$$\begin{aligned} |b_n| &= \left|\frac{a_0 + \cdots + a_n}{n+1}\right| \\ &\le \frac{|a_0| + \cdots + |a_n|}{n+1} \\ &\le \|a\|_\infty, \; n = 0, 1, \ldots. \end{aligned}$$

De aquí, después de tomar el supremo sobre los $|b_n|$, se obtiene

$$\|Ca\|_\infty \le \|a\|_\infty, \; \forall\, a \in \ell^\infty.$$

Esto indica que $C(\ell^\infty) \subset \ell^\infty$ y $\|C\| \le 1$.

Para establecer la otra desigualdad y así obtener la conclusión, tomemos $e_0 \equiv (1, 0, \ldots, 0, \ldots,)$ y notemos que $\|e_0\|_\infty = 1$ y

$$Ce_0 = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots).$$

Luego,

$$\|C\| \ge \|Ce_0\|_\infty = 1. \tag{1}$$

ii) Sea $a \in c$ y tomemos $L = \lim a \equiv \lim_{n\to\infty} a_n$. Para probar que $\lim Ca = L$, consideremos $n \in \mathbb{N}$ y observemos que, para $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ se cumple

$$\begin{aligned} \left|\frac{\sum_{j=0}^n a_j}{n+1} - L\right| &= \left|\frac{\sum_{j=0}^n (a_j - L)}{n+1}\right| \le \\ &\le \sum_{j=0}^N \frac{|a_j - L|}{n+1} + \sum_{j=N+1}^n \frac{|a_j - L|}{n+1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Dado $\epsilon > 0$, elijamos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_j - L| \le \frac{\epsilon}{2}, \qquad \forall\, j \ge N.$$

Una vez fijada N se cumple que $\sum_{j=0}^N \frac{|a_j - L|}{n+1} \to 0$ cuando $n \to \infty$ y, por lo tanto, podemos encontrar N_1 tal que $N_1 \ge N$ y

$$\sum_{j=0}^N \frac{|a_j - L|}{n+1} \le \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall\, n \ge N_1.$$

Sea $n \ge N_1$. Entonces, a partir de (2) y lo anterior, resulta

$$\left|\frac{\sum_{j=0}^n a_j}{n+1} - L\right| \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{(n-N)}{n+1}\frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Esto prueba que $L = \lim Ca$.

Como C_c es la restricción de C al espacio c, se cumple que $\|C_c\| \le \|C\| \le 1$. Por otra parte, el elemento en ℓ^∞ utilizado para establecer (1) pertenece al espacio $c_0 \subset c$. De aquí se sigue que $\|C_c\| \ge \|C_0\| \ge 1$. □

Hemos visto que $C(e_0) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$. Luego, $\|e_0\|_1 = 1$, $\|Ce_0\|_1 = \infty$. Esto indica que

$$C(\ell^1) \not\subset \ell^1.$$

A continuación estableceremos que el operador de Cesàro preserva los espacios ℓ^p, $1 < p < \infty$ [3, Section 9.8], por lo cual el caso de ℓ^1 es excepcional. Para ello es necesario introducir algunos conceptos adicionales. Dado $p \in [1, \infty]$, su *exponente conjugado* $q = q(p)$ está definido por la condición $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Así, $q(1) = \infty$, $q(\infty) = 1$ y $q(p) = \frac{p}{p-1}$ si $1 < p < \infty$. Las siguientes desigualdades establecen una relación muy importante entre p y su exponente conjugado [4, Sect. 1.2]

Teorema 2. *Sea* $1 < p < \infty$ *y* q *su exponente conjugado. Entonces:*
i) $xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$, $\forall\, x, y \ge 0$.
ii)(Desigualdad de Hölder)Si $x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n \ge 0$*:*

$$\sum_{k=0}^n x_n y_n \le \left(\sum_{k=0}^n x_k\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^n y_k\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorema 3 (G. H. Hardy, 1920). *Sea* $1 < p < \infty$ *y* q *su exponente conjugado. Si* $a \in \ell^p$*, entonces* $Ca \in \ell^p$ *y* $\|Ca\|_p \le q\|a\|_p$.

Demostración. Sea $a \in \ell^p$ y $b \equiv Ta$. Sin perder generalidad, supondremos que $a_n \ge 0, n = 0, 1, \ldots$. De acuerdo con i) del teorema anterior se cumple

$$b_{n-1}b_n^{p-1} \le \frac{1}{p}b_{n-1}^p + \frac{1}{q}b_n^p, \; n = 0, 1, \ldots. \tag{3}$$

Empleando primero que $a_n = (n+1)b_n - nb_{n-1}$ y después (3), resulta

$$\begin{aligned} q\, a_n\, b_n^{p-1} - b_n^p &= q(n+1)b_n^p - qnb_{n-1}b_n^{p-1} - b_n^p \\ &\ge q(n+1)b_n^p - n\frac{q}{p}b_{n-1}^p - nb_n^p - b_n^p \\ &= (q-1)(n+1)b_n^p - n\,(q-1)\,b_{n-1}^p. \end{aligned}$$

Sumando ahora, se sigue que

$$q\sum_{n=0}^{N} a_n b_n^{p-1} - \sum_{n=0}^{N} b_n^p \ \geq \ (q-1)(N+1)b_N^p \ \geq \ 0.$$

De aquí y usando la desigualdad de Hölder, se obtiene

$$\sum_{n=0}^{N} b_n^p \leq q\sum_{n=0}^{N} a_n b_n^{p-1} \leq q\left(\sum_{n=0}^{N} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=0}^{N} b_n^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Por lo tanto,

$$\left(\sum_{n=0}^{N} b_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq q\left(\sum_{n=0}^{N} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq q\|a\|_p.$$

Haciendo $N \to \infty$ concluimos lo afirmado. □

Convergencia en el sentido de Cesàro

El siguiente ejemplo señala que hay sucesiones divergentes cuya correspondiente sucesión de promedios es convergente. Al permitir extender la definición de límite a un subespacio más grande que c, esta propiedad del operador de Cesàro lo hace de mucho interés.

Ejemplo 1. Consideremos la sucesión $a = (1,-1,1,-1,\ldots)$ y notemos que es divergente. Por otra parte, $b = Ca = (1,0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},\ldots)$. Así, $b_{2m} = \frac{1}{2m+1}$ y $b_{2m+1} = 0,\ m = 0,1,\ldots$. Por lo tanto, $\lim Ca = 0$.

Definición 2. Una sucesión $a \in \mathcal{S}$ *converge en el sentido de Cesàro* (o en *promedio*), si su sucesión de promedios Ca converge. En este caso definimos C–$\lim a \equiv \lim Ca$.

Aunque a primera vista pudiera considerarse algo abstracta, la convergencia en el sentido de Cesàro aparece de manera natural en varias situaciones y se ha empleado exitosamente para el manejo de series divergentes. Es en este contexto que el matemático italiano Ernesto Cesàro (1859-1906) la introdujo y probó el resultado que discutiremos a continuación.

Corolario 1. *Sean $\{s_n\}$, $\{\sigma_n\} \subset \mathbb{C}$ sucesiones convergentes. Si $s_n \to s$ y $\sigma_n \to \sigma$, entonces $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_n\sigma_{n-k} \to s\sigma$.*

Demostración. Escojamos primero un número real positivo M tal que $|\sigma_j|\leq M,\ j = 0,1,\ldots$. Tomemos ahora $n \in \mathbb{N}$ y notemos que

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} s_n\sigma_{n-k}}{n+1} = \frac{\sum_{k=0}^{n}(s_n - s)\sigma_{n-k} + s\sum_{k=0}^{n}\sigma_{n-k}}{n+1}.$$

Basta entonces establecer que

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(s_n - s)\sigma_{n-k} \quad \to \quad 0, \tag{4}$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sigma_{n-k} \quad \to \quad \sigma. \tag{5}$$

Como $|s_n - s|\to 0$, de i) en el teorema 1 se sigue que $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |s_n - s|\to 0$. Usando ahora que

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(s_n - s)\sigma_{n-k}\right| \leq M\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |s_n - s|,$$

se obtiene (4). Por otra parte, empleando nuevamente i) del teorema 1 resulta que

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sigma_{n-k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sigma_n \to \sigma. \ \square$$

Definición 3. Consideremos sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\} \subset \mathbb{C}$. El producto de Cauchy de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, definida por $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},\ n = 0,1,\ldots$.

En general, el producto de Cauchy de dos series convergentes puede no converger. Sin embargo, a continuación se establecerá que siempre converge en el sentido de Cesaro.

Teorema 4 (Cesàro, 1890). *Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\} \subset \mathbb{C}$ sucesiones tales que las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergen a s y σ, respectivamente. Entonces, su producto de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge a $s\sigma$ en el sentido de Cesaro.*

*Demostración.*Tomemos

$$s_n \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k,\ \sigma_n \equiv \sum_{k=0}^{n} b_k,\ t_n \equiv \sum_{k=0}^{n} c_k,\ n = 0,1,\ldots.$$

Observemos que

$$t_k = s_0 b_k + s_1 b_{k-1} + \cdots + s_k b_0,\ k = 0,1,\ldots.$$

En virtud del corolario anterior, se sigue que

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} t_k = s_0\sigma_n + s_1\sigma_{n-1} + \cdots + s_n b_0 \to s\sigma. \ \square$$

Otro logro espectacular haciendo uso de la convergencia en el sentido de Cesaro fue el del matemático húngaro Lípot Fejér (1880-1959) quien estableció que las sumas parciales de una serie de Fourier de una función continua y con periodo 2π, siempre convergen en promedio a la función. Nuevamente, hay que tener presente que las sumas parciales (sin promediar) de la serie de Fourier de una función continua pueden diverger en muchos puntos. Posteriormente, Henri Lebesgue (1875-1941) generalizó este resultado a funciones integrables. En este caso, la convergencia en promedio ocurre casi en todas partes [10, Thms. 8.30 and 8.32].

Presentamos a continuación unos ejemplos de interés.

Ejemplo 2. Una sucesión que es densa en $[0,1]$ y que converge en el sentido de Cesaro.

Expresemos el conjunto de números racionales en $[0,1]$ como $\{r_n : n = 0, 1\ldots\}$ y notemos que este conjunto es denso en $[0,1]$. Definamos en seguida la sucesión a por

$$a \equiv (r_0, 1-r_0, r_1, 1-r_1, \ldots).$$

Claramente, a es densa en $[0,1]$. Su sucesión de promedios $b = Ta$ está dada por

$$b_{2n} = \frac{r_n}{2n+1}, \quad b_{2n+1} = 0, \ n = 0, 1, \ldots.$$

Luego, $C-\lim a = 0$.

Teorema Tauberiano de Hardy

El desarrollo anterior conduce de manera natural a preguntarse si dada una sucesión $a \in \ell^\infty$, ¿existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $C^n a$ es convergente? La respuesta es sorprendente y se obtendrá inmediatamente a partir del siguiente resultado.

Teorema 5 (Tauberiano de Hardy, 1909). *Sea $a = \{a_n\} \in \ell^\infty$. Si su sucesión de promedios Ca converge y la sucesión $\{n(a_{n+1} - a_n)\} \in \ell^\infty$, entonces a converge.*

Demostración.(Recordemos que $b_n = \frac{a_0+\cdots+a_n}{n+1}$.) Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y tomemos k tal que $0 \leq k < n$. Entonces,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sum_{j=k+1}^n a_n}{n-k} \\ &= \frac{\sum_{j=k+1}^n (a_n - a_j)}{n-k} + \frac{\sum_{j=k+1}^n a_j}{n-k} \\ &= \frac{\sum_{j=k+1}^n (a_n - a_j)}{n-k} + \frac{(n+1)b_n - (k+1)b_k}{n-k} \\ &= \frac{\sum_{j=k+1}^n (a_n - a_j)}{n-k} + \frac{(k+1)}{n-k}(b_n - b_k) + b_n. \end{aligned}$$

Así,

$$a_n - b_n = \frac{k+1}{n-k}(b_n - b_k) + \frac{1}{n-k}\sum_{j=k+1}^n (a_n - a_j). \quad (6)$$

De acuerdo a la hipótesis, escojamos un número real M tal que $1 \leq M$ y $|n(a_{n+1} - a_n)| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Luego,

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{M}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Sea $\epsilon > 0$ y, sin perder generalidad, supongamos que $0 < \epsilon < 1$. Escojamos en seguida $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|b_n - b_m| \leq \frac{\epsilon^2}{2M}, \ \forall m, n \geq N. \quad (8)$$

Consideremos $n > N$. Teniendo presente (6), buscamos ahora $k \in \mathbb{N}$ de manera que $1 \leq k < n$ y

$$|a_n - a_{n-1}| + \cdots + |a_{k+2} - a_{k+1}| \leq \epsilon. \quad (9)$$

Con este objetivo, a partir de (7), notemos que

$$\begin{aligned} &|a_n - a_{n-1}| + \cdots + |a_{k+2} - a_{k+1}| \\ &\leq M\left(\frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{k+1}\right) \\ &\leq \frac{n-k-1}{k+1}M. \end{aligned}$$

Esto conduce a buscar k tal que $N < k < n$ y

$$\frac{n-k-1}{k+1}M \leq \epsilon.$$

Resulta así que k debe cumplir

$$\frac{(n-1)M - r}{M+\epsilon} \leq k. \quad (10)$$

Lo cual nos lleva a definir k por la condición

$$k - 1 < \frac{(n-1)M - \epsilon}{M+r} \leq k. \quad (11)$$

Necesitamos ahora verificar que efectivamente se cumple $N < k < n$. Para ello notemos que de la desigualdad izquierda en (11) se sigue

$$k < \frac{nM}{M+\epsilon} < n. \quad (12)$$

Por otra parte, a partir de la desigualdad derecha en (11)se obtiene $k \geq \frac{(n-1)M-1}{M+1}$. Para que $N < k$, basta entonces que se satisfaga $\frac{(n-1)C-1}{C+1} > N$, lo cual equivale a

$$n > \frac{(N+1)(M+1)}{M}. \quad (13)$$

Sea pues $n > \dfrac{(N+1)(M+1)}{M} > 2$ y escojamos k como en (11). Por (12) y (13) se cumple que $N < k < n$. Luego, se satisface (9) y, como consecuencia,

$$|a_n - a_{n-1}| + \cdots + |a_{k+j+1} - a_{k+j}| \leq \epsilon,$$

para $j = 1, \ldots, n-k-1$. Por lo tanto,

$$|a_n - a_j| \leq |a_n - a_{n-1}| + \cdots + |a_{j+1} - a_j| \leq \epsilon, \quad (14)$$

para $j = k+1, \ldots, n-1$. Nos resta estimar $\frac{k+1}{n-k}$. A partir de (12) resulta $n - k > n - \frac{nM}{M+\epsilon} = \frac{n\epsilon}{M+\epsilon}$. Por consiguiente

$$\frac{k+1}{n-k} < \frac{nM + M + \epsilon}{n\epsilon} < \frac{2nM}{n\epsilon} = \frac{2M}{\epsilon}. \quad (15)$$

Empleando en (6) esto junto con (14) y (8), se obtiene que

$$|a_n - b_n| \leq \frac{2M}{\epsilon}\frac{\epsilon^2}{2M} + \frac{1}{n-k}(n-k)\epsilon \ \leq\ 2\epsilon,$$
$$\forall\, n > \frac{(N+1)(M+1)}{M}. \ \square$$

Observación 1. Sea $a \in \ell^\infty$ y $b \equiv Ca$. Entonces, la sucesión $\{n(b_{n+1} - b_n)\} \in \ell^\infty$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Observemos que

$$\begin{aligned}(b_{n+1} - b_n) &= \frac{a_0 + \cdots + a_{n+1}}{n+2} - \frac{a_0 + \cdots + a_n}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)a_{n+1} - (a_0 + \cdots + a_n)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{a_{n+1} - b_n}{n+2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $n\,|b_{n+1} - b_n| \leq 2\|a\|_\infty$. $\square$

Corolario 2. *Sea $a \in \ell^\infty$. Si, para algún $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $C^n a$ converge, entonces Ca converge.*

Demostración. Procederemos por inducción. Claramente, la conclusión es válida cuando $n = 1$. Consideremos ahora $n = k+1$, donde $k \in \mathbb{N}$, y tomemos $s \equiv C^k a$. Por la observación anterior, s satisface las condiciones del teorema tauberiano de Hardy. Lo cual implica que $C^k a = s$ converge. Luego, por la hipótesis de inducción, concluimos que Ca converge. $\square$

¿Es C compacto?

En cierto sentido, C "mejora"las sucesiones originales. Esto nos lleva a preguntarnos si C es compacto.

Definición 4. Sean X y Y espacios normados. Un operador lineal $S : X \to Y$ es *compacto*, si para cualquier sucesión $\{x_n\} \subset X$ que es acotada, la sucesión $\{Tx_n\} \subset Y$ posee una subsucesión convergente.

El siguiente resultado indica las propiedades de los operadores compactos que requeriremos [4, Ch. 8]

Teorema 6. *Sean X y Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal acotado.*

i) Si $\dim R(T) < \infty$, entonces T es compacto.

ii) La colección de operadores compactos $S : X \to Y$ es un conjunto cerrado.

iii) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Si T es compacto, $\lambda \neq 0$ y T es $1-1$, entonces T es sobre.

Teorema 7.
i) $C : \ell^p \to \ell^p$ no es compacto, $1 < p \leq \infty$.
ii) $C : \ell^p \to \ell^r$ es compacto, $1 \leq p < r \leq \infty$.

*Demostración.*i) Analizaremos el operador $C - I$ en ℓ^p. Consideremos primero $1 < p < \infty$. Sea $a \in \mathcal{S}$ tal que $Ca - a = 0$. Se sigue que a es la sucesión constante a_1. Si $a \in \ell^p$, esto lleva a concluir que $a = 0$. Por lo tanto, $C - I$ es $1-1$ en ℓ^p. Por otra parte, si $b = (C - I)$, entonces $b_1 = 0$. Lo cual implica que C no es sobre. Aplicando iii) del teorema anterior concluimos que C no es compacto.

Consideremos ahora $p = \infty$ y supongamos que $C : \ell^\infty \to \ell^\infty$ es compacto. Como $T(c_0) \subset c_0$, entonces $C : c_0 \to c_0$ también lo es. Sin embargo, por el mismo argumento que en el caso anterior, esto no es posible

ii) Sea $p \geq 1$, $a \in \ell^p$ y $b = Ca$. Tomemos primero $r \in (p, \infty)$. Usando la desigualdad de Hölder, resulta

$$|b_n| \leq \frac{\sum_{k=0}^n |a_k|}{n+1} \ \leq\ \frac{(\sum_{k=0}^n |a_k^p|)^{\frac{1}{p}}}{(n+1)^{\frac{1}{p}}}.$$

Luego,

$$|b_n|^r \leq \frac{\|a\|_p^r}{(n+1)^{\frac{r}{p}}},\ \forall\, n = 0, 1, \ldots.$$

Lo cual implica

$$\|Ca\|_r \ \leq\ K\|a\|_p,$$

siendo $K \equiv \left(\sum_{n=0}^\infty (n+1)^{\frac{-r}{p}}\right)^{\frac{1}{r}} < \infty$. En consecuencia $C : \ell^p \to \ell^r$ es acotado.

Dado $N \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathcal{S}$, definamos $C_N a = a\chi_N$, donde χ_N es la sucesión cuyos $N+1$ términos iniciales son 1 y los demás son 0. Observemos que

$$\|Ca - C_N a\|_r = \left(\sum_{k=N+1}^\infty |b_n|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq K_N \|a\|_p, \quad (16)$$

donde $K_N = \left(\sum_{n=N+1}^\infty (n+1)^{\frac{-r}{p}}\right)^{\frac{1}{r}}$. Como $K_N \to 0$, resulta que $C_N \to C$. Por i) del teorema anterior, cada C_N es un operador compacto. Ya que el espacio de operadores compactos de ℓ^p en ℓ^r es cerrado, esto permite concluir que $C : \ell^p \to \ell^r$ es compacto.

Tomemos ahora $r = \infty$. Elijamos $s \in \mathbb{R}$ tal que $p < s$ y sea $C_s = C : \ell^p \to \ell^s$. Entonces $C : \ell^p \to \ell^\infty$ se expresa como $C = jC_r$, siendo j la inclusión de ℓ^s en ℓ^∞, que es continua. Como C_r es compacto, se sigue que C también lo es. $\square$

Observación 2. En ocasiones se tiene un operador lineal $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ tal que $T(\ell^p) \subset \ell^r$ y $T : \ell^p \to \ell^r$ es compacto, siempre que $1 \leq p < r \leq \infty$. Una cuestión natural en esta situación es la de averiguar lo que pasa en el "exponente crítico"$r = p$. El operador de Cesaro C ilustra lo que puede ocurrir. Por una parte, $C(\ell^1) \not\subset \ell^1$ y, por otra, $C : \ell^p \to \ell^p$ es acotado (pero no compacto) cuando $1 < p < \infty$.

Un Caso Sencillo

Discutiremos a continuación los iterados del operador de Cesàro en el caso de dimensión finita, esto es $C : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$. En $\mathbb{K}^m$ consideraremos la norma

$$\|(a_0, \ldots, a_{m-1})\| \equiv \text{máx}\{|a_0|, \ldots, |a_{m-1}|\}.$$

El operador C tiene ahora la forma

$$T(a_0, a_2, \ldots, a_{m-1}) \equiv \left(a_0, \frac{a_0 + a_1}{2}, \ldots, \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{m-1}}{m}\right).$$

Fijemos $x = (a_0, \ldots, a_{m-1}) \in \mathbb{K}^m$ y tomemos $x_0 \equiv (a_0, a_0, \ldots, a_0)$, $H \equiv \{(a_0, c_1, \ldots, c_{m-1}) : c_2, \ldots, c_{m-1} \in \mathbb{K}\ \}$. Notemos que $x, x_0 \in H$, $C(H) \subset H$, y $C(x_0) = x_0$.

Sea $y = (a_0, c_1, \ldots, c_{m-1}) \in H$. Entonces,

$$\|\frac{a_0 + c_1 + \cdots + c_j}{j} - \frac{ja_0}{j}\| \leq \frac{j-1}{j}\|y - x_0\|,$$

para $j \geq 2$. Lo cual implica

$$\|Cy - Cx_0\| \leq K\|y - x_0\|, \ \forall\, y \in H.$$

donde $K \equiv (1 - \frac{1}{m}) < 1$.De lo anterior se obtiene

$$\|C^n x - x_0\| = \|C^n x - C^n(x_0)\| \leq K^n \|x - x_0\|,$$

con lo cual se prueba el siguiente resultado.

Proposición 1. *Sea* $x = (a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}) \in \mathbb{K}^m$. *Entonces* $T^n x \to (a_0, \ldots, a_0)$.

Conclusión

El trabajo que hemos presentado tiene generalizaciones interesantes en varias direcciones. Una de ellas se presenta cuando, de manera natural, se pasa de una variable discreta ($n = 1,\ 2,\ \ldots$) a una variable continua (x pertenece a un intervalo). Aparece entonces el operador integral

$$Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(s)ds,$$

y en lugar de los espacios de sucesiones ℓ^p se consideran los espacios $L^p(I)$, formados por las funciones $f : I \to \mathbb{K}$ que son (Lebesgue) p-integrables ($1 \leq p < \infty$).

A. Brown, P. R. Halmos y A. L. Shields retomaron en 1965 [2] las investigaciones realizadas por Hardy del operador de Cesaro en los casos discreto y continuo $I = (0, \infty)$, y consideraron además el caso continuo $I = (0, 1)$. Su desarrollo se llevó a cabo para $p = 2$, que es la situación de mayor relevancia; lograron encontrar el espectro de cada uno de los operadores de Cesaro y establecer que tienen la propiedad de hiponormalidad, una característica que resulta relevante en el estudio de las propiedades espectrales de un operador definido en un espacio de Hilbert.

El trabajo de Brown-Halmos-Shields estimuló gran actividad en el área y en los siguientes 8 años D. W. Boyd [1], G. Leibowitz [6,7] y B. E. Rhoades [9] pudieron demostrar los resultados correspondientes para los casos en que $p \neq 2$. Asímismo, en esta época T. L. Kriete III y D. Trutt lograron probar que, cuando $p = 2$, el operador de Cesaro discreto es subnormal [5], mejorando con ello el resultado sobre hiponormalidad obtenido en [2]. En años recientes todavía se discuten aspectos relacionados con las cuestiones descritas [8].

Bibliografía

[1] D. W. Boyd, 'The spectrum of the Cesàro operator'. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 29(1968), 31-34.

[2] A. Brown, P. R. Halmos and A. L. Shields, 'Cesàro operators'. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 26(1965), 125-137.

[3] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities.* Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1952.

[4] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications.* John Wiley & Sons, New York, 1978.

[5] T. L. Kriete III and D. Trutt, 'The Cesàro operator in ℓ^2 is subnormal'. *Amer. J. Math.* 93(1)(1971), 215-225.

[6] G. Leibowitz, 'Spectra of discrete Cesàro operators'. *Tamkang J. Math.*, 3(1972), 123-132.

[7] G. Leibowitz, 'The Cesàro Operators and their generalizations: examples in infinite dimensional linear analysis'. *Amer. Math. Monthly*, 80(6)(1973), 654-661.

[8] G. Leibowitz, 'Rhaly matrices'. *J. Math. Analysis Appl.*, 128(1987), 272-286.

[9] H. C. Rhaly Jr., 'Hyponormal terraced matrices'. *Far East J. Math. Sci.* 5(3)(1997), 425-428.

[10] B. E. Rhoades, 'Spectra of some Hausdorff operators'. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 32(1971), 91-100.

[11] K. Stromberg, *An introduction to classical real analysis.* Wadsworth International Group, Belmont, California, 1981.