MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 1

Donde corresponda, A, B y D son conjuntos, y $f : D \to B$. En cualquier caso, prueba lo indicado.

1. Sean $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ y $\{B_\beta : \beta \in J\}$ colecciones de conjuntos. Entonces $\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \bigcap \left(\bigcup_{\beta\in J} B_\beta\right) = \bigcup_{\alpha\in I,\beta\in J}(A_\alpha \cap B_\beta)$. En particular, cuando J consiste de un sólo elemento, resulta $\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \cap B = \bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha \cap B)$.

2. (Ley de De Morgan) Sea $A_\alpha \subseteq \Omega$, $\forall\, \alpha \in J$. Entonces $\left(\bigcup\limits_{\alpha\in J} A_\alpha\right)^c = \bigcap\limits_{\alpha\in J} A_\alpha^c$.

3. $A \cap B = \phi$ si, y sólo si, $A \subseteq B^c$ $(A, B \subseteq \Omega)$.

4. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

5. Si $A_\alpha \subseteq D, \forall\, \alpha \in J$, entonces $f(\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in J} f(A_\alpha)$.

6. Si $B_\alpha \subseteq B, \forall\, \alpha \in J$, entonces $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$.

7. $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$, $\forall\, A \subseteq B$

8. Si $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ y Σ es una σ-álgebra en Ω_1, entonces la colección $\Sigma_f := \{A \subseteq \Omega_2 : f^{-1}(A) \in \Sigma\}$ es una σ-álgebra en Ω_2

9. Sea Ω un espacio topológico y en $E \subseteq \Omega$ consideremos la topología inducida. Entonces $\mathcal{B}(E) = \{E \cap B : B \in \mathcal{B}(\Omega)\}(= \mathcal{B}(\Omega)_E)$.

10. La colección τ^* definida en clase es una topología en $\mathbb{R}^*$.

11. Sea $\Omega \neq \phi$. Determina las funciones Σ-medibles $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ si $\Sigma = \{\phi, \Omega\}$.

Definición Sea Ω un conjunto no-vacío arbitrario. Recordemos que la *función característica* (respecto de Ω) de $A \subseteq \Omega$, es $\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in \Omega \setminus A. \end{cases}$

12. Si $A, B \subseteq \Omega$, entonces $\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B$.

Para entregar y revisarse el lunes 27 de enero, 2020.