MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 2

En lo que sigue A, B, C, D y Ω son conjuntos. Donde corresponda prueba lo indicado.

1. Si $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ es una colección de conjuntos, entonces $A \cup (\cap_{\alpha\in J} A_\alpha) = \cap_{\alpha\in J}(A \cup A_\alpha)$. En particular, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. (Ley de De Morgan) Sea $A_\alpha \subseteq \Omega$, $\forall\, \alpha \in J$. Entonces $\left(\bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha^c$.

Definición La *diferencia simétrica* de A y B es $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

3. El conjunto potencia 2^Ω con la operación $(A, B) \mapsto A \triangle B$ es un grupo conmutativo.

4. Sea $f : \Omega_1 \to \Omega_2$. Si Σ es una σ-álgebra en Ω_2, entonces la colección $f^{-1}(\Sigma) := \{f^{-1}(A) : A \in \Sigma\}$ es una σ-álgebra en Ω_1.

5. Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$, entonces $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$, $\forall\, A \subseteq C$.

Definición Una colección $\mathcal{S}$ de subconjuntos de Ω es un *semianillo* si:

a) $\phi \in \mathcal{S}$.

b) Si $A, B \in \mathcal{S}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{S}$.

c) Si $A, B \in \mathcal{S}$, entonces $A \setminus B$ es una unión finita de conjuntos en $\mathcal{S}$ que son disjuntos entre sí.

6*. Determina si la colección formada por los intervalos en $\mathbb{R}$ que son acotados, es un semianillo. Justifica tu respuesta.

Definición Sea E un espacio topológico. Un subconjunto $A \subseteq E$ es F_σ si se puede expresar como unión numerable de conjuntos cerrados en E.

7*. Sea E un espacio topológico y $f_n : E \to \mathbb{R}$ una función continua, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. El conjunto donde la sucesión $\{f_n\}$ converge en $\mathbb{R}$ se puede expresar como intersección numerable de conjuntos F_σ. Por lo tanto es boreliano.

8. $\max\{-a, -b\} = -\min\{a, b\}$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^*$.

9. La función $P : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ definida por $P(x) = x^2$ es continua.

10. Si $f, g \in \mathcal{L}^0(\Sigma)$, entonces el conjunto $\{x \in \Omega : f(x) < g(x)\}$ es medible.

11. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$, $f \neq 0$. Si f es medible, entonces $\frac{1}{f} \in \mathcal{L}^0(\Sigma_E)$, donde $E := \Omega \setminus f^{-1}(0)$ y $\frac{1}{\pm\infty} := 0$.

12. Sea $A_n \subseteq \Omega, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Si los conjuntos A_n son disjuntos entre sí, encuentra $\lim_{n\to\infty} \chi_{A_n}$. Justifica tu respuesta.

Para revisar y entregarse el miércoles 6 de febrero, 2020.

SUGERENCIAS

6. Al trabajar con intervalos conviene tener presente que $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo si, y sólo si, para cualesquiera $x, y \in I$ se cumple que $(1-t)x + ty \in I$ si $0 \leq t \leq 1$.

7. Recuerda que una sucesión de números reales converge a un número real siempre y cuando sea de Cauchy.