MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 3

Enseguida A, B, D y Ω son conjuntos. En cada caso prueba lo indicado.

1. Sea $f : D \to B$ y $E_\alpha \subseteq B$, $\forall\, \alpha \in J$. Entonces $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in J} E_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in J} f^{-1}(E_\alpha)$.

2. Sean $f : D \to B$ y $A_\alpha \subseteq D$, $\forall\, \alpha \in J$.

i) Entonces $f(\bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha\in J} f(A_\alpha)$.

ii Si f es 1-1, entonces $f(\bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in J} f(A_\alpha)$.

iii) Encuentra una función f y y conjuntos $A, B \subseteq D(f)$ tales que $f(A \cap B)$ es subconjunto propio de $f(A) \cap f(B)$.

3. Sea $A_\alpha \subseteq D$, $\forall\, \alpha \in I$.

i) Entonces $\chi_{\cup_{\alpha\in I} A_\alpha} = \sup_{\alpha\in I} \chi_{A_\alpha}$.

ii) Encuentra una expresión para $\chi_{\cap_{\alpha\in I} A_\alpha}$ en términos de χ_{A_α}

4. Sea $\mathcal{S}$ un semianillo en Ω. Entonces la colección de conjuntos que son unión finita de conjuntos en $\mathcal{S}$ que son disjuntos entre sí es un anillo.

5. Si Σ es una colección no-vacía de subconjuntos de Ω tal que:

a) $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$,

b) $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cap B \in \Sigma$,

c) $A_n \in \Sigma, \forall\, n \in \mathbb{N}$, y $A_n \cap A_m = \phi, n \neq m \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$,

entonces Σ es una σ-álgebra.

Definición Sea E un espacio topológico. Un conjunto $A \subseteq E$ es G_δ si se puede expresar como intersección numerable de conjuntos abiertos.

6. Sea E un espacio topológico. El conjunto de puntos donde una función $f : E \to \mathbb{R}$ es continua es un conjunto G_δ. Por lo tanto es boreliano.(Sug.: Para cada $N \in \mathbb{N}$ considera el conjunto formado por todos los puntos $x \in E$ para los cuales existe un abierto V_x en E tal que $x \in V_x$ y si $u, v \in V_x$, entonces $|f(u) - f(v)| < \frac{1}{N}$.)

7. El espacio topológico $(\mathbb{R}^*, \tau^*)$ es compacto.

8. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y consideremos en I su σ-álgebra de Borel. Si $f : I \to \mathbb{R}^*$ es monótona, entonces f es medible.

9. Sea $D \subseteq \Omega$. Si $f, g : D \to \mathbb{R}^*$, entonces $(f \vee g)^\Omega = f^\Omega \vee g^\Omega$ y $(f \wedge g)^\Omega = f^\Omega \wedge g^\Omega$.

10. Sea $\{a_n\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^*$. Entonces:

i) $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a$.

ii) $\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n$.

11. Sea (Ω, Σ) un espacio medible. Entonces $S(\Sigma)$ es un álgebra.

Para revisar y entregarse el miércoles 12 de febrero, 2020.