MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 4

Enseguida Ω es un conjunto arbitrario. En cada caso prueba lo indicado.

1. Sean $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ y $\{B_\alpha : \alpha \in I\}$ colecciones de conjuntos. Entonces $(\cup_{\alpha\in I} A_\alpha) \triangle (\cup_{\alpha\in I} B_\alpha) \subseteq \cup_{\alpha\in I}(A_\alpha \triangle B_\alpha)$.

2. Determina si la colección $\{V \cup K : V \subseteq \mathbb{R} \text{ es abierto}, \ K \subseteq \mathbb{R} \text{ es cerrado}\}$ es un anillo en $\mathbb{R}$.

3. Sean E y F espacios topológicos. Si $h : E \to F$ es un homeomorfismo, entonces h preserva conjuntos borelianos.

4. Si $f : D \to \mathbb{R}^*$ y $T : D \to D$, entonces $(f \circ T)_+ = f_+ \circ T$ y $(f \circ T)_- = f_- \circ T$.

5. Sea $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}^*$. Si $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces se cumple que $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n$ y $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$.

6. Sea $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}^*$. Si $a_n \to a \in \mathbb{R}^*$, entonces $a_n \vee 0 \to a \vee 0$.

Notación Si $A \subseteq F(D, \mathbb{R}^*)$, entonces $A^+ := \{f \in A : f \geq 0\}$.

7*. Si $f \in \mathcal{L}_0(\Sigma)^+$, entonces f se puede expresar como $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{A_k}$, donde $A_k \in \Sigma$ y $c_k \geq 0$. Los conjuntos A_k pueden no ser disjuntos entre sí.

8. Sean (Ω, Σ) un espacio medible y $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$. Si μ es σ-aditiva y existe $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) < \infty$, entonces μ es una medida.

9. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de conjuntos en Ω. Si $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ es una medida finitamente aditiva y $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

10. $\Sigma(\mu)$ es una σ-álgebra y $\Sigma \subseteq \Sigma(\mu)$.

11. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Para $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^*$ definamos $f \sim g$ si $f = g$ c.t.p. Prueba que $\sim$ define una relación de equivalencia.

Para revisar y entregarse el miércoles 19 de febrero, 2020.

SUGERENCIAS

7. Recuerda que si $a \in \mathbb{R}^*$ es el lmite de una sucesión, entonces a se puede expresar como una serie (límite de una sucesión de sumas parciales).