MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 5

Enseguida Ω es un conjunto, Σ una σ-álgebra en Ω y μ una medida definida en Σ, según corresponda. En cada caso prueba lo indicado.

1. La colección de intervalos $\{(a,b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ es un semianillo en $\mathbb{R}$.

2. Consideremos sucesiones $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ y $\{b_n\} \subseteq \mathbb{R}^*$. Si $\{a_n\}$ es convergente en $\mathbb{R}$, entonces $\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ y $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

3. Sean $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}^*, a \in \mathbb{R}^*$. Si $a_n \vee 0 \to a \vee 0$ y $(-a_n) \vee 0 \to (-a) \vee 0$, entonces $a_n \to a$.

4. Si $s \in S(\Sigma)$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces $f \circ s \in S(\Sigma)$.

Notación $R(\mu) := \{A \in \Sigma : \mu(A) < \infty\}$.

5. Determina si $R(\mu)$ es un anillo.

6. Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^*$ y $\{f_n\} \subseteq F(\Omega, \mathbb{R}^*)$. Si $f_n \to f$ c.t.p. y $f_n \to g$ c.t.p., entonces $f = g$ c.t.p.

7. (Continuación del ejercicio 4.10.) Para $C = E \cup A$, donde $E \in \Sigma, B \in \mathcal{N}_0(\mu)$ y $A \subseteq B$, definamos $\overline{\mu}(C) := \mu(E)$. Entonces $\overline{\mu}$ está bien definida, $\overline{\mu}$ es una medida y el espacio de medida $(\Omega, \Sigma(\mu), \overline{\mu})$ es completo.

8. Sean $n, j \in \mathbb{N}$ y definamos $a_{n,j} = 1$ si $n = j$; $a_{n,j} = -1$ si $n + 1 = j$; $a_{n,j} = 0$ en los demás casos. Verifica que las series dobles $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{n,j}$ y $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j}$ existen y determina si son iguales.

9. Sea μ^* una medida exterior en Ω. Si $A, B \subseteq \Omega$ y $\mu^*(B) < \infty$, entonces $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \triangle B)$.

10. Sean $A, B \subseteq \Omega$. Si existe un conjunto $E \subseteq \Omega$ que es $\Sigma(\mu^*)$-medible, y tal que $A \subseteq E$ y $B \subseteq E^c$, entonces $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

Definición Sea $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ una medida aditiva. Para $A \in \Sigma$ definamos $\widetilde{\mu}(A) := \sup\{\mu(B) : B \in \Sigma_A, \mu(B) < \infty\}$ y $\mu_\infty(A) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \mu(A) < \infty \\ \infty, & \mu(A) = \infty \end{array} \right.$.

11. i) Las funciones $\widetilde{\mu}$ y μ_∞ son medidas aditivas.

ii) $\mu = \widetilde{\mu} + \mu_2$.

Para revisar y entregarse el miércoles 26 de febrero, 2020.
Primer examen parcial: lunes 3 de marzo, a las 4 pm.