MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 6

Enseguida Ω es un conjunto, Σ una σ-álgebra en Ω y μ una medida definida en Σ, según corresponda. En cada caso prueba lo indicado.

1. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$. Entonces la función $\chi_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua si, y sólo si, $E = \phi$ o $E = \mathbb{R}$.

Definición Sea V un espacio vectorial. La *traslación por* $h \in V$ es la función $T_h : V \to V$ definida por $T_h(x) = h + x$.

2. Para cada $h \in V$, establece que T_h es una biyección y encuentra $(T_h)^{-1}$.

3. Señala dos sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ que sean acotadas y tales que $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) > \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$.

4. Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^*$. Si $f, g = 0$ μ-c.t.p., entonces $f + g = 0$ μ-c.t.p.

5. Sean μ^* una medida exterior en Ω y $A \subseteq \Omega$. Si existe un conjunto medible $E \subseteq \Omega$ tal que $\mu^*(A \bigtriangleup E) = 0$, entonces A es medible y $\mu(A) = \mu(E)$.

6. El anillo generado por un semianillo $\mathcal{S}$ es $\{S_1 \cup \ldots \cup S_n : S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}\}$.

7. Señala cómo debe ser Ω para que la medida de contar en Ω sea σ-finita.

Definición Una sucesión $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}^0(\Omega, \mathbb{R})$ *converge en medida* a $f \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathbb{R})$, si para cada $\epsilon > 0$ resulta que $\mu\left(\{x \in E : \ |f(x) - f_n(x|) \geq \ \epsilon\right\} \to \ 0$, cuando $n \to \infty$. Para expresar esto indicaremos $f_n \overset{\mu}{\to} f$.

8. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\chi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función característica de $I_n = [n, n+1]$.
i) Verifica que $\lim_{n\to\infty} \chi_n = 0$.
ii) Determina si $\chi_n \overset{\mu}{\to} 0$.

9. Sean $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$, conjuntos arbitrarios. Si $A_j \subseteq \Omega_j, j = 1, \ldots, n$, expresa $\chi_{A_1 \times \ldots \times A_n}$ mediante $\chi_{A_1}, \ldots, \chi_{A_n}$.

Dado un espacio métrico M, recordemos que $d_A(x) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ define la distancia de un punto $x \in M$ a un conjunto $A \subseteq M$.

10. Si $A \neq \phi$, entonces $|\, d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y), \ \forall\, x, y \in M$.

11. (Continuación del ejercicio 5.11.) Entonces:
i) $\widetilde{\widetilde{\mu}} = \widetilde{\mu}$ y $\widetilde{\mu_\infty} = 0$.
ii) Si μ es una medida, entonces $\widetilde{\mu}$ también lo es.

Para revisar y entregarse el miércoles 11 de marzo, 2020.