MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 7

Enseguida Ω es un conjunto, Σ una σ-álgebra de conjuntos en Ω, μ una medida definida en Σ y μ^* una medida exterior en Ω, según corresponda. En cada caso prueba lo indicado.

1. Toda traslación en $\mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo.

*2. Consideremos sucesiones $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ y $\{b_n\} \subseteq \mathbb{R}^*$. Si $\{a_n\}$ es convergente en $\mathbb{R}$, prueba que $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$.

3. Sea (E, τ) un espacio topológico y $\mathcal{C} \subseteq 2^E$ tal que $\phi \in \mathcal{C}$ y $\ell(\phi) = 0$. Si $\mathcal{C} \subseteq \tau$, entonces $\ell^*(A) = \inf\{\ell^*(V) : A \subseteq V,\ V \in \tau\}, \forall\, A \subseteq \Omega$.

*4. Sean E un espacio topológico y $\mathcal{S}$ un semianillo de conjuntos en E. Si $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ es finitamente aditiva y
$\sup\{\mu(K) : K \subseteq A,\ K \text{es compacto}, K \in \mathcal{S}\} = \inf\{\mu(V) : A \subseteq V, V \in \tau \cap \mathcal{S}\}$,
prueba que μ es una premedida.

Definición Sea (Ω, Σ) un espacio medible. Una función $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}$ es una *medida escalar*, si ν es σ-aditiva.

5. Sea ν una medida escalar en (Ω, Σ) y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$. Entonces:
i) $\nu(\phi) = 0$.
ii) ν es aditiva.
iii) Si $E_n \subseteq E_{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces $\nu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n)$.

6. Cualquier subconjunto medible de un conjunto σ-finito es σ-finito.

*7. Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}^0(\Sigma, \mathbb{R})$ y $f, g \in \mathcal{L}^0(\Sigma, \mathbb{R})$. Si $f_n \overset{\mu}{\to} f$ y $f_n \overset{\mu}{\to} g$, entonces $f = g$ c.t.p.

*8. Si $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ y $0 \leq c \leq m(E)$, entonces existe $A \in \mathcal{M}(E)$ tal que $m(A) = c$.

9. La función $\chi_{\mathbb{Q}}$ no es Riemann-integrable en $[0, 1]$.

10. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ y supongamos que existe $0 < \rho < 1$ tal que para cada intervalo abierto y acotado I, se cumple $m^*(E \cap I) \leq \rho\ell(I)$. Entonces $m(E) = 0$.

(En otras palabras, si $m^*(E) > 0$, entonces para cualquier $\rho \in (0, 1)$ existe un intervalo abierto y acotado I tal que $m^*(E \cap I) > \rho\ell(I)$. Es decir, para ρ cercano a 1, el conjunto $E \cap I$ "casi" cubre al intervalo I.)

11. Sean M un espacio métrico, $x \in M$ y $A \subseteq M$. Entonces $d_A(x) = 0$ si, y sólo si, $x \in \overline{A}$.

Para revisar y entregarse el 13 de marzo, 2020.

Sugerencias:

*2. Trata de usar dos veces el ejercicio 5.5: directamente en una ocasión y en otra expresando $b_n = (b_n + a_n) - a_n$).

**4. Sea $\{E_n\} \subseteq \mathcal{S}$ tal que $E_n \cap E_m = \phi$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{S}$. Para establecer que $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ empieza por considerar un conjunto K en $\mathcal{S}$ que sea compacto y esté contenido en $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, un conjunto V_n en V_n que sea abierto y que contenga a E.

*6. Sean $x \in \Omega, n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$. Observa que si $|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)| \geq |f(x) - g(x)| \geq \epsilon$, entonces $|f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}$ o $|f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}$.

*7. Ten presente el teorema del valor intermedio.