MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 8

A continuación Ω es un conjunto, Σ una σ-álgebra de conjuntos en Ω, μ una medida definida en Σ y μ^* una medida exterior en Ω, según corresponda. En cada caso prueba lo indicado.

Definición Sea E un espacio topológico. Un conjunto $F \subseteq E$ es *σ-compacto*, si se puede expresar como unión numerable de conjuntos compactos en E.

1. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto F_σ, entonces A es σ-compacto.

2. Sea M un espacio métrico. Si Σ es una σ-álgebra en M tal que cada función continua $f : M \to \mathbb{R}$ es medible, entonces $\mathcal{B}(M) \subseteq \Sigma$.

3. Si $\mathcal{S}_1$ es un semianillo en Ω_1 y $\mathcal{S}_2$ es un semianillo en Ω_2, entonces la colección $\{A \times B : A \in \Sigma_1, B \in \Sigma_2\}$ es un semianillo en $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Definición Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y creciente. Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ de extremos $a, b \in \mathbb{R}$, donde $a \leq b$, definamos $\ell_f(I) = f(b) - f(a)$.

4. La función ℓ_f es una premedida.

5. Si μ es σ-finita, entonces la σ-álgebra generada por $R(\mu)$ es Σ.

6. Sean μ una medida en un anillo de conjuntos $\mathcal{S}$ y μ^* su medida exterior inducida. Tomemos $0 \leq C < \infty$ y supongamos que existe $\{S_k\} \subseteq \mathcal{S}$ tal que $\Omega \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} S_k$. Si $\mu(S) \leq C, \forall\, S \in \mathcal{S}$, entonces $\mu(E) \leq C, \forall\, E \in \Sigma(\mu^*)$.

7. Sea $f(x) = \frac{1}{q}$ si x es racional y $x = \frac{p}{q}$ en forma reducida; $f(x) = 1$, si x es irracional. Encuentra $\int_{[0,1]} f dm$.

8. Sean $f \in L^0(\Sigma)^+$ y μ_f su medida asociada. Entonces

$$\int_\Omega s\, d\mu_f = \int_\Omega s f d\mu,\ \forall\, s \in S(\Sigma)^+.$$

9. Sean $f \in \mathcal{L}_0(\Sigma)^+$ y $E \in \Sigma$. Entonces $\int_E f d\mu = \int_E f_E d\mu_E$.

10. Sea $f \in \mathcal{L}^0(\Sigma)$. Si $g \in \mathcal{L}(\mu)$ y $|f| \leq g$, entonces $f \in \mathcal{L}(\mu)$.

11. Sea G un grupo conmutativo y H un subgrupo de G. Si $x, y \in G$, definamos $x \sim y$ si $x - y \in H$. Entonces $\sim$ es una relación de equivalencia.

Para revisar y entregarse el 23 de marzo, 2018.