MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 9

Enseguida Ω es un conjunto, Σ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω, μ una medida definida en Σ y μ^* una medida exterior en Ω, según corresponda. En cada caso prueba lo indicado.

1. Si $f : D \to \mathbb{R}^m$ es continua y D es F_σ en $\mathbb{R}^n$, entonces $f(D)$ es F_σ en $\mathbb{R}^m$.

2. Si $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ es aditiva y $\mu(E_n) \to 0$ cuando $\{E_n\} \subseteq \Sigma, E_{n+1} \subseteq E_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\cap_{n=1}^{\infty} E_n = \phi$, entonces μ es una medida escalar.

3. i) Sea $\mathcal{S}$un semianillo en Ω. Para cada $E \subseteq \Omega$, la colección $\mathcal{S}_E := \{S \cap E : S \in \mathcal{S}\}$ es un semianillo en E.

ii) Si $E \in \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{S}_E = \{S : S \in \mathcal{S}, S \subseteq E\}$.

iii) Supongamos que μ es una premedida en $\mathcal{S}$ y $E \in \mathcal{S}$. Entonces la restricción μ_E de μ es una premedida en $\mathcal{S}_E$ y $(\mu^*)_E = (\mu_E)^*$.

Definición Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Un conjunto $A \in \Sigma$ es un *átomo*, si $\mu(A) > 0$ y cuando $B \in \Sigma_A$ se cumple que $\mu(B) = 0$ o $\mu(B) = \mu(A)$.

4. Determina si la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ tiene átomos.

5. Sean $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$. Si $\mu_f = \mu_g$, prueba que $f = g$ c.t.p..

6. Sea D un conjunto arbitrario y $f : D \to (0, \infty)$. Si existe $C \in (0, \infty)$ tal que $\sum_{x \in A} f(x) \leq C$ para cualquier subconjunto finito $A \subseteq D$, entonces sop$f$ es numerable.

7*. Sean $f \in L^0(\Sigma)^+$ y μ_f su medida asociada. Entonces

$$\int_\Omega g\, d\mu_f = \int_\Omega g f d\mu,\ \forall\, g \in L^0(\Sigma)^+.$$

8. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $\mathcal{L}^0(\Sigma)$. Si $0 \leq f_n \leq f$ y $f_n \to f$, entonces $\int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu$.

9. Sea $f \in \mathcal{L}^0(\Sigma)$. Si $g \in \mathcal{L}(\mu)$ y $|f| \leq g$, entonces $f \in \mathcal{L}(\mu)$.

10. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$. Si $\Omega = A \cup B$, donde A y B son conjuntos medibles, y f es integrable tanto en A como en B, entonces f es integrable.

11. Sean $E \in \Sigma$ y $g : E \to \mathbb{R}^*$. Entonces $g \in \mathcal{L}(\mu_E)$ si, y sólo si, $g^\Omega \in \mathcal{L}(\mu)$. En este caso $\int_E g d\mu_E = \int_E g^\Omega d\mu$.

12. Sea V un espacio vectorial y W un subespacio vectorial de V. Dados $x, y \in V$ definamos $x \sim y$ si $x - y \in W$. Entonces:

i) $\sim$ define una relación de equivalencia en V.

ii) Con las operaciones definidas mediante representantes, el espacio cociente V/W es un espacio vectorial.

Para entregarse a más tardar el lunes 6 de abril, 2020.

Sugerencias:

7*. Ten presente el teorema de convergencia monótona.