MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 10

Enseguida Ω es un conjunto, Σ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω, μ una medida definida en Σ y μ^* una medida exterior en Ω, según corresponda. En cada caso prueba lo indicado.

Definición Sea V un espacio vectorial. La *dilatación* por $\lambda \in \mathbb{R}$ es la función $T_\lambda : V \to V$ definida por $T_\lambda(x) = \lambda x$.

1. Si $\lambda \neq 0$, entonces $T_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo.

Definición Para $j = 1, 2$, sea (Ω_j, Σ_j) un espacio medible. Si $\mu : \Omega_1 \to [0, \infty]$ es una medida y $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ es medible, definamos $\mu^T : \Sigma_2 \to [0, \infty]$ por $\mu^T(B) := \mu(T^{-1}(B))$.

2. La función μ^T es una medida.

3. Sea $\mathcal{S}$ el semianillo en $\mathbb{R}$ formado por los intervalos de la forma $(a, b]$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \leq b$. Si $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ satisface $\mu(\phi) = 0$ y $\mu(S_1 \cup S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2)$ cuando $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ y $S_1 \cap S_2 = \phi$, entonces μ es finitamente aditiva. (Es decir, si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}, A_j \cap A_k = \phi$ si $j \neq k$ y $\cup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{S}$, entonces $\mu(\bigcup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j)$.

4. Si $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$, prueba que $f \wedge g$ y $f \vee g \in \mathcal{L}(\mu)$

5. Sean $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$. Si $\mu_f = \mu_g$, entonces $f = g$ c.t.p..

6. Determina $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} (1 - x^2)^n$.

7. Sea χ_n la función característica del intervalo $[n, n+1)$ y $f_n := \frac{1}{n}\chi_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

i) Encuentra $\lim_{n\to\infty} f_n$. ii) Verifica que $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n$.

iii) Prueba que no existe $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ c.t.p.

iv) ¿ Qué indica lo anterior respecto al teorema de convergencia dominada?

8. El espacio formado por las sucesiones $s = \{a_n\}$ (vistas como funciones $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$) que son integrables bajo la medida de contar $\mu_\#$, es $\ell^1 := \{\{a_n\} : \sum_{n=1}^\infty |a_n| < \infty\}$.

9. Construye una sucesión de funciones $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R})$ tal que $f_n \to f$ y no se satisfaga la conclusión del lema de Fatou.

Definición Sea $0 \leq a < \infty$. Llamaremos *cuadrado en* $\mathbb{R}^n$ de lado a a un conjunto de la forma $I_1 \times \cdots \times I_n$ donde cada I_j es un intervalo en $\mathbb{R}$ y $\ell(I_j) = a, \ \forall\, j = 1, \ldots, n$.

Definición Sea M un espacio métrico. El *diámetro* de un conjunto $A \subseteq M$ es $\operatorname{diam} A := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$, donde $\sup \phi := 0$.

10. Si $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cuadrado de lado $a \geq 0$, encuentra su diámetro (en términos de a).

11. Sea X un espacio vectorial con una seminorma $\| \cdot \|$. Entonces:

i) $N := \{x \in X : \|x\| = 0\}$ es subespacio vectorial de X.

ii) La función $\|[x]\| := \|x\|$ define una norma en el espacio vectorial cociente X/N. Al espacio normado así obtenido lo llamaremos *espacio normado inducido por* la seminorma $\| \cdot \|$.

Para entregarse el miércoles 22 de abril, 2020