MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 11

Enseguida Ω es un conjunto, Σ una σ-álgebra de conjuntos en Ω, μ una medida definida en Σ, según corresponda. En cada caso prueba lo indicado.

Definición Para $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ definamos $\|f\|_1 := \int_\Omega |f|$.

1. La función $\|\cdot\|_1$ es una seminorma en el espacio vectorial $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Definición $L^1(\mu)$ es el espacio normado inducido en $\mathcal{L}^1(\mu)$ por la seminorma $\|f\|_1 := \int_\Omega |f|$.

Aunque los elementos de $L^1(\mu)$ son clases de equivalencia se acostumbra seguirlos denotando como funciones y así lo haremos. Si $\Omega \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ y μ es la medida de Lebesgue, en lugar de $L^1(\mu)$ usaremos la notación $L^1(\Omega)$. A la convergencia bajo $\|\cdot\|_1$ la llamaremos *convergencia en* L^1. Sean $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}(\mu)$ y $f \in \mathcal{L}(\mu)$. Entonces que $f_n \to f$ en L^1 significa que $\int_\Omega |f_n - f| \to 0$.

2. Sean $\{f_n\}$, $\{g_n\} \subseteq \mathcal{L}(\mu)$, $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $f_n \to f$ en L^1 y $g_n \to g$ en L^1, entonces:

i) $f_n + g_n \to f + g$ en L^1.

ii) $\lambda f_n \to \lambda f$ en L^1, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

iii) $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$.

3. Si μ es σ-finita, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y existe $b \geq 0$ tal que $\left|\int_A f d\mu\right| \leq b\, \mu(A)$, siempre que $A \in \Sigma$ y $\mu(A) < \infty$, entonces $|f| \leq b$ c.t.p.

4*. Sean $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}(\mu)$ y $f \in \mathcal{L}^0(\Sigma)$. Si $f_n \to f$ c.t.p. y $\int_\Omega |f_n| \leq C < \infty$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, prueba que $f \in \mathcal{L}(\mu)$ y $\int_\Omega |f| \leq C$.

5. Sean $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Si $f_n \xrightarrow{u} f$ (convergencia uniforme) y $\mu(\Omega) < \infty$, entonces $f \in \mathcal{L}(\mu)$ y $f_n \to f$ en L^1.

6*. Sea $A_n \subseteq \Omega$ un conjunto medible, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, entonces casi todo $x \in \Omega$ pertenece sólo a un número finito de los conjuntos A_n.

7. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y $f : E \to \mathbb{R}^*$. Si f es continua c.t.p., entonces f es medible.

8. Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto medible, entonces

$$m(E) = \sup\{m(A) : A \subseteq E, A \text{ es medible y acotado}\}.$$

Si $m(E) > 0$ concluye que existe $A \subseteq E$ que es medible, acotado y $m(A) > 0$.

9. Sean $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no-vacío y $f, g : V \to \mathbb{R}$. Si $f = g$ c.t.p. y ambas funciones son continuas, entonces $f = g$. En particular, si $f = 0$ c.t.p. y f es continua, entonces $f = 0$.

Definición Sea μ una medida en Σ. Una medida escalar, o una medida, $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}^*$ es *absolutamente continua* respecto de μ, si $N_0(\mu) \subseteq N_0(\nu)$. Para indicar lo anterior usaremos la notación $\nu \ll \mu$.

10. Sea ν una medida escalar en el espacio medible $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$. Si $\nu(R) = 0$ para cada rectángulo $\mathcal{R}$ que es abierto y acotado y $\nu \ll m$, entonces $\nu = 0$.

Observación Donde se requiera identificamos $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$.

11. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Entonces f es medible si, y sólo si, sus partes real e imaginaria lo son.

Para entregarse el miércoles 29 de abril, 2020.

Sugerencias:

4*. Ten presente el lema de Fatou.

6*. Considera $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$.