MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 12

Enseguida Ω es un conjunto, Σ una σ-álgebra de conjuntos en Ω y μ una medida definida en Σ, según corresponda. En cada caso prueba lo indicado.

1. Sean $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}(\mu)$ y $f \in \mathcal{L}(\mu)$. Si $f_n \to f$ en L^1, entonces se cumple que $\int_E f_n \to \int_E f,\ \forall\, E \in \Sigma$.

2. Consideremos un espacio topológico Hausdorff E y un semianillo $\mathcal{S}$ en E tal que $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$, donde $S_k \in \mathcal{S}, \forall\, k \in \mathbb{N}$. Sea $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty)$ una premedida como en el ejercicio 7.4. Entonces su medida inducida satisface
$\sup\{\mu(K) : K \subseteq A,\ K \text{es compacto}, K \in \mathcal{S}\} = \inf\{\mu(V) : A \subseteq V, V \in \tau \cap \mathcal{S}\}$, $\forall\, A \in \Sigma(\mu^*)$.

3. Si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $f \in \mathcal{L}(K)$.

4. La completación del espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), m_n)$ es el espacio de medida de Lebesgue $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), m_n)$.

5. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones integrables. Si $\int_K f dm = \int_K g dm$, para cualquier conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$, prueba que $f = g$ c.t.p.

Definición Sea $(\Omega_j, \Sigma_j, \mu_j)$ un espacio de medida, $j = 1, 2$. En el semianillo $\mathcal{S} = \{A \times B : A \in \Sigma_1, B \in \Sigma_2\}$ definamos $\mu_1 \times \mu_2(A \times B) := \mu_1(A)\mu_2(A_2)$.

6. Entonces $\mu_1 \times \mu_2$ es una premedida en $\mathcal{S}$.

Al extenderla por el proceso de Lebesgue-Carathéodory, a la medida obtenida se le llama *medida producto* y la seguiremos denotando por $\mu_1 \times \mu_2$. Notemos que, en particular, $\mu_1 \times \mu_2$ está definida en $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$.

7*. Si $E \subseteq \mathbb{R}$ es medible y $m(E) > 0$, entonces $m(E + \mathbb{Q}) = \infty$.

8. El conjunto $\mathcal{L}^0(\Sigma, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo.

Definición Para $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $1 \leq j < k \leq n$, sea $T_{j,k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la transformación lineal que intercambia las coordenadas j y k, esto es,

$$T_{j,k}(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \ := \ (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_j, \ldots, x_n).$$

9. Determina el comportamiento de la medida de Lebesgue bajo $T_{j,k}$.

10. Para $j = 1, 2$, sean (Ω_j, Σ_j) un espacio medible, $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ una función medible, $\mu : \Sigma_1 \to [0, \infty]$ una medida y μ^T definida como en el ejercicio 10.2.
i) Si $f \in \mathcal{L}^0(\Omega_2)$, entonces $f \circ T \in \mathcal{L}^0(\Omega_1)$.
ii) (Fórmula de cambio de variable.) Si $f \in \mathcal{L}^(\Omega_2)^+$, entonces $f \circ T \in \mathcal{L}^0(\Omega_1)^+$ y $\int_{\Omega_1} f \circ T\, d\mu = \int_{\Omega_2} f d\mu^T$.

11. Sea V un conjunto no-vacío y abierto en $\mathbb{R}^n$. Si $f : V \to \mathbb{R}^k$ es de clase C^1, entonces f es localmente de Lipschitz.

Para comentar y entregarse el viernes 8 de mayo, 2020.

Sugerencias:

2*. Procede como con la medida de Lebesgue.

4*. Para establecer que $\mathcal{B}(m) \otimes \mathcal{B}(n) \subseteq \mathcal{B}(m+n)$, fija un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^m$ y considera la colección $\{A \subseteq \mathbb{R}^n : A \times V \in \mathcal{B}(m+n).\}$

7*. Considera primero un subconjunto de E que sea "sencillo".