MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 13

Enseguida Ω es un conjunto, Σ una σ-álgebra de conjuntos en Ω, μ una medida definida en Σ y μ^* una medida exterior en Ω, según corresponda. En cada caso prueba lo indicado.

1. Si $f, g \in \mathcal{L}^0(\Sigma, \mathbb{C})$, entonces $fg \in \mathcal{L}^0(\Sigma, \mathbb{C})$.

2*. Sean $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible y $\{f_n\}$ una sucesión en $\mathcal{L}^0(\Sigma)$. Si $\mu(\Omega) < \infty$ y $f_n \to f$ c.t.p., entonces $\{f_n\}$ converge a f en medida.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Dada una función $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$ definamos la función Vf por $Vf(x) := \int_a^x f(t)dt,\ \forall\, x \in [a, b]$.

3. Vf es continua.

Notación. Si Σ_j es una σ-álgebra en $\Omega_j,\ j = 1, 2$, denotaremos por $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ la σ-álgebra generada en $\Omega_1 \times \Omega_2$ por el semianillo $\mathcal{S} = \{A \times B, A \in \Sigma_1, B \in \Sigma_2\}$.

4. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Definición Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es *integrable* (respecto de μ), si sus partes real f_1 e imaginaria f_2 lo son. En este caso, $\int_\Omega f d\mu := \int_\Omega f_1 d\mu + i \int_\Omega f_2 d\mu$.

5. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Entonces f es integrable si, y sólo si, f es medible y $|f|$ (que es una función real) es integrable.

6*. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^m$. Si $f : E \to \mathbb{R}^n$ es localmente de Lispschitz y $m < n$, entonces $f(E)$ tiene medida cero.

7. Sea $r > 0$. El conjunto $\{(x_1, y_2, x_3) : 0 \leq x_1, x_3 \leq r, x_1 \leq y_2 \leq x_1 + r\} \subseteq \mathbb{R}^3$ es compacto.

8*. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operador lineal cuya matriz asociada es $M_T = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ a, & b \end{pmatrix}$, siendo $b \neq 0$. Expresa a T como composición finita de operadores lineales del tipo $T_{j,k}, M_{j,c}\ S_{j,k}$.

9. Sea $T : \Omega \to \Omega$ una biyección tal que T y T^{-1} son funciones medibles y para cualquier conjunto medible $A \subseteq \Omega$ se cumple que $\mu(T(A)) = k\mu(A)$, para algún número real $k > 0$, .

i) Encuentra μ^T.

ii) Relaciona $\int_{T(A)} f d\mu$ con $\int_A f \circ T d\mu$.

iii) Aplica lo anterior al caso de traslaciones y operadores lineales en $\Omega = \mathbb{R}^n$.

10*. Sea $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ la función definida por $f(x) = \|x\|$. Prueba:
i) Si $A \subseteq [0, \infty)$ tiene medida cero, entonces $m_n(f^{-1}(A)) = 0$.
ii) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}(\mathbb{R}))$-medible.
iii) $m_n(S_r) = 0$, donde $S_r := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}, \ \forall\, r \geq 0$.

11. Sean X, Y conjuntos, $A, B \subseteq X$ y $D, E \subseteq Y$. Entonces
$$(A \setminus B) \times (D \setminus E) = A \times D \setminus ((A \times E) \cup (B \times D)).$$

Para entregarse el 18 de mayo, 2020.

Sugerencias:

2*. Considera el teorema de Egorov.

4*. Para establecer que $\mathcal{B}(m) \otimes \mathcal{B}(n) \subseteq \mathcal{B}(m+n)$, fija un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^m$ y considera la colección $\{A \subseteq \mathbb{R}^n : A \times V \in \mathcal{B}(m+n)$.)

7*. Trata de usar el caso en que $m = n$.

9*. Trata de “llevar”su matriz asociada a la matriz identidad.)

10*. i) Empieza con el caso en que A es acotado. Para ello establece primero que si $0 \leq a < b$, entonces $b^n - a^n \leq nb^{n-1}$.