MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 14

Enseguida Ω es un conjunto, Σ una σ-álgebra de conjuntos en Ω y μ es una medida definida en Σ, según corresponda. En cada caso prueba lo indicado.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y monótona-creciente y ℓ_f la medida definida en el ejercicio 8.2. Determina si ℓ_f tiene átomos de la forma $\{c\}$, donde $c \in \mathbb{R}$.

2. El conjunto $\mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo y la integral es un funcional lineal complejo.

3*. En $\mathcal{L}(\mu, \mathbb{C})$ se cumple la desigualdad del triángulo: $|\int_\Omega f| \leq \int_\Omega |f|$.

4. (Operador de Volterra) Sean $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Si $f \in L^1((a,b))$, definamos $Vf(x) := \int_a^x f(s)ds,\ \forall\, x \in [a,b]$. Entonces V define un operador lineal continuo de $L^1((a,b))$ en $C([a,b])$. (Obs: En $C([a,b])$ consideramos la norma del supremo: $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$).

5. Sea $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}, 0 < x \leq 1,\ f(0) = 0$. Entonces en la clase de equivalencia (véase el ejercicio 4.11) de f bajo $\sim$ no hay funciones $\mathcal{R}$-integrables en $[0,1]$.

6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^3},\ \forall\, x \geq 0$. Determina $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n$.

7. Sean $f, g \in \mathcal{L}^0(\Sigma)$. Si f^2 y g^2 son integrables, entonces fg es integrable.

8. Sea $f : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ una función acotada y supongamos que las funciones $y \to f(x,y)$, $x \to f(x,y)$ son continuas. Entonces la función F definida por $F(x) = \int_0^1 f(x,y)dy,\ 0 \leq x \leq 1$, es continua. En particular, Si f es continua entonces F es continua.

9. Si $\alpha > 0$, calcula $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x$.

10. i) $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t),\ \forall\, t > 0$.
ii) $\Gamma(1) = 1$.
iii) $\Gamma(n+1) = n!\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

11. Sea $T : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ definida por $T(x) = \|x\|$. En el ejercicio 13.10 se estableció que T es $(\mathcal{M}\mathbb{R}^n), \mathcal{M}(\mathbb{R}))$-medible, por lo que existe la medida m^T, definida en $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Por otra parte, sean V_n el volumen de $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ y m_h la medida con densidad $h(r) = nV_n r^{n-1}$ respecto de m, esto es $m_h(A) = \int_A nV_n r^{n-1} dr, \forall\, A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Prueba: i) $m^T \ll m$ y $m_h \ll m$.

ii) $m^T((a,b)) = m_h((a,b))$, si $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

iii) $m^T(V) = m_h(V)$, para cualquier abierto $V \subseteq \mathbb{R}$.

iv) m^T y m_h son finitas en compactos.

iv) $m^T(E) = m_h(E)$, si $E \subseteq \mathbb{R}$ tiene medida finita.

v) $m^T = m_h$.

Para entregarse el lunes 25 de mayo, 2020.

Sugerencias:

3*. Observa que $|\int_\Omega f| = e^{i\theta}$, para algún $\theta \in \mathbb{R}$, y trata de usar el caso real.