MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 15

Enseguida Ω es un conjunto, Σ una σ-álgebra de conjuntos en Ω y μ es una medida definida en Σ, según corresponda. En cada caso prueba lo indicado.

1. Enuncia y prueba el teorema de convergencia dominada para funciones con valores complejos.

2. Observa que $C([a,b]) \subseteq L^1((a,b))$ y prueba que la inclusión es continua.

Definición La *transformada de Fourier* de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ es la función $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definida por $\hat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,s>} f(s) ds$, donde $i^2 = -1$ y $\langle \cdot \rangle$ es el producto escalar en $\mathbb{R}^n$.

3. Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{f}$ está bien definida, es acotada y continua.

Definición Un operador lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es *ortogonal*, si $TT^* = T^*T = I$, donde T^* es el operador adjunto de T e I es el operador identidad en $\mathbb{R}^n$.

4. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operador ortogonal. Entonces:

i) T preserva la distancia.

ii) T preserva la medida de Lebesgue.

Definición Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$ y $v = (x_0, h)$, donde $x_0 \in \mathbb{R}^n, h > 0$. El *cono* (sólido) con base B y vértice v es $K(B,v) := \{(x,0)+t(v-(x,0)) : x \in B, 0 \leq t \leq 1\}$.

5. Si $B \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible, entonces $K(B,v) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ también lo es.

6. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{R}$-integrable y definamos $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $\forall\, x \in [a,b]$. Entonces F es derivable c.t.p.

7. Determina si la función f definida por $f(x) = \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}, \forall\, x > 0$, es integrable en $(0, \infty)$. 9*. Si $g : [0,\infty) \to [0,\infty]$ es una función integrable, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\|x\|)dx = nV_n \int_0^\infty g(r) r^{n-1} dr.$$

9. $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|x\|^2} dx = \pi$.

ii) $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

10. i) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

ii) $\Gamma(k + \frac{1}{2}) = \frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{2^{2k} k!}, \ \forall\, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

11. $(\Omega_1 \times \Omega_2 \setminus E)_x = \Omega_2 \setminus E_x,\ \forall\, E \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2, \forall\, x \in \Omega_1$.

Definición. Sean Ω_1 y Ω_2 conjuntos, $f : \Omega_1 \to \mathbb{R}^*, g : \Omega_2 \to \mathbb{R}^*$. Definimos entonces $f \otimes g : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}^*$ por $(f \otimes g)(x, y) := f(x)g(y)$.

12. Si $f \in L^0(\Sigma_1)$ y $g \in L^0(\Sigma_2)$, entonces $f \otimes g \in L^0(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)$

Para entregarse el lunes 1 de junio, 2020

Sugerencias:

8*. Ten presente el ejercicio 14.11 y la fórmula de cambio de variable.