MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 16

Enseguida Ω es un conjunto, Σ una σ-álgebra de conjuntos en Ω y μ es una medida definida en Σ, según corresponda. En cada caso prueba lo indicado.

1. Si $\{f_n\}$ y $f \in \mathcal{L}(\mu)$ son como en el teorema de convergencia dominada, entonces $f_n \to f$ en $L^1(\mu)$.

2. Después de conocer que $L^1(\Omega)$ es un espacio normado, ¿qué debe uno preguntarse?

3*. Sea $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}(\mu)$. Si $f_n \to f$ c.t.p., $f \in \mathcal{L}(\mu)$ y $\int_\Omega |f_n| d\mu \to \int_\Omega |f| d\mu$, entonces $f_n \to f$ en L^1.

4. Sea $T : L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \to B(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ el operador definido por $Tf = \hat{f}$. Entonces T es lineal y continuo. ($B(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ consiste de las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ que son acotadas y tiene la norma del supremo: $\|f\|_{\text{sup}} := \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}$.)

5. Sean $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operador lineal y $\{v_1, \ldots, v_n\}$y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$. Si $T(v_j) = w_j, \forall\, j = 1, \ldots, n$, entonces T es ortogonal.

6. Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Si $f : V \to \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 y $\det f'(x) \neq 0,\ \forall\, x \in V$, entonces f es $(\mathcal{M}, \mathcal{M})$-medible.

7. Construye una sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, tales que:

a) Cada f_n es R-integrable.

b) $\{f_n\}$ converge en $[0,1]$.

c) $\{f_n\}$ es uniformemente acotada.

d) $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ no es R-integrable.

Observa que lo anterior indica que el teorema de convergencia dominada no es cierto con funciones R-integrables.

8. Determina si $f^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ en lo siguientes casos:

i) $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$.

ii) $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

Definición (Núcleos de Dirichlet)Si $n \in \mathbb{N}$, sea $D_n(x) := \dfrac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}, x \neq 0.$

9. Entonces D_n es integrable en $[-\pi, \pi],\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

10. Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y $v = (x_0, h) \in \mathbb{R}^{n+1}$, donde $h > 0$. Entonces la medida del cono $K(B, v)$ es $\mu_{n+1}(K(B,v)) = \dfrac{\mu_n(B)h}{n+1}$.

11. Sean $V_0 = 1$ y V_n la medida de $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

i) $V_n = V_{n-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

ii) Si $n = 2k$, entonces $V_n = \frac{\pi^k}{k!} = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}$.

iii) Si $n = 2k-1$, entonces $V_n = \dfrac{k! 2^{2k} \pi^{k-1}}{(2k)!} = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}$.

12. Sea $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y $F(t) = \int_a^b f(x,t), \forall\, t \in \mathbb{R}$. Prueba que F es derivable y encuentra $F'(t)$.

Para entregarse el lunes 8 de junio, 2020.

Sugerencias:

3*. Trata de utilizar el lema de Fatou.