ANÁLISIS FUNCIONAL: TAREA 1

1. Prueba que $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty,\ \forall\, x \in \mathbb{K}^n$.

2. Sea X un espacio de Banach y $V \subset X$ un subespacio. Prueba que V es completo si, y sólo si, V es cerrado.

3. Sea E un espacio topológico, $p \in E$ y $f, f_n : E \to \mathbb{K},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Si $f_n \xrightarrow{u} f$ y cada f_n es continua en p, prueba que f es continua en p.

4. Señala una función $\varphi \in C[0,1]$ tal que $\varphi(c) = c$ si c es constante y $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g),\ \varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g),\ \forall\, f, g \in C[0,1]$.

5. Sea $c > 0$. i) Tomemos $d \equiv c + \sqrt{c}$ y definamos

$$P_0 \equiv 0, \quad P_{n+1} \equiv P_n + \tfrac{1}{d}(t - P_n^2),\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Procediendo por inducción, prueba que

$$0 \leq \sqrt{t} - P_n(t) \leq \sqrt{t}\left(1 - \tfrac{\sqrt{t}}{d}\right)^n,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [0,1].$$

Concluye que $P_n \xrightarrow{u} \sqrt{\cdot}$ en $[0,1]$. ii) Prueba que $|\circ|$ se puede aproximar uniformemente por polinomios en $[0,c]$.

6. Sea K un conjunto compacto. Si $A \subset C(K)$ es un álgebra, prueba que $\overline{A}$ también lo es.

7. Prueba que las hipótesis del teorema de Stone-Weierstrass implican que el conjunto compacto en cuestión es Hausdorff.

8. Sea $K \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ y $A \subset C(K)$ el conjunto formado por todos los polinomios complejos. Determina si A satisface las condiciones del teorema de Stone-Weierstrass.

9. Sea $\mathcal{P}$ la colección de polinomios con coeficientes complejos y definidos en S^1. Verifica que $\mathcal{P}$ es una subálgebra de $C(S^1)$ que contiene a las constantes, separa puntos y que $\mathcal{P}$ no es denso en $C(S^1)$.

10. Sean $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Si $f \in C[a,b]$ y $\int_a^b f x^n = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$, prueba que $f = 0$. (Sug.: prueba que $\int_a^b f^2 = 0$.)

Enero 29, 2009.