ANÁLISIS FUNCIONAL: TAREA 3

1. Si $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia no-vacía de álgebras en un conjunto Ω, prueba que $\bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{A}_\alpha$ también es una σ-álgebra en Ω.

2. Si $s \in S(\Omega)$ y $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ es cualquier función, prueba que $f \circ s$ es medible.

3. Prueba que la medida contar (en un conjunto arbitrario A) es efectivamente una medida.

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida.

4. Determina si $S(\mu)$ es una subálgebra de $F(\Omega)$.

Definición Si $g : \Omega \to [0, \infty]$ es una función medible, denotemos por S el conjunto de $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\mu(g^{-1}((\alpha, \infty]) = 0$ y tomemos $\beta(g) = \operatorname{ínf} S$, donde $\operatorname{ínf} \emptyset = \infty$.

5. Si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, prueba que $\|f\|_\infty = \beta(|f|)$.

6. Sea μ una medida en Ω y $\{A_n\}$ una colección de conjuntos medibles en Ω. Si $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) < \infty$, prueba que p.c.t. $x \in \Omega$, se cumple que x pertenece a lo más a un número finito de los conjuntos A_n.

7. Si $s \in \ell^{p_0}$ para algún $p_0 \in [1, \infty)$, prueba que $\operatorname{lím}_{p\to\infty} \|s\|_p = \|s\|_\infty$.

8. Determina si la medida de contar (restringida a la σ-álgebra de Borel) es regular en los siguientes casos: i) $A \equiv \mathbb{N}$. ii) $A \equiv \mathbb{R}$.

9. Si $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, prueba que $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$.

10. Sea X un espacio normado y $A, K \subset X$. Si A es cerrado y K compacto. prueba que $A + K$ es cerrado.

11. Sea X un espacio normado y $K, V \subset X$. Si $K \subset V$, K es compacto y V es abierto, prueba que existe $r > 0$ tal que $K + B_r \subset V$.

Para revisar y entregarse el miércoles 25 de febrero, 2009.