ANÁLISIS FUNCIONAL: TAREA 4

1. Sea X un espacio normado. Prueba que X es completo si, y sólo si, cualquier serie en X que converja absolutamente, es convergente en X.

2. Sea Ω un espacio medible, E un espacio topológico y $f : \Omega \to E$. Si $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ y $f : \Omega_n \to E$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, es medible, prueba que f es medible.

Definición Sea A un conjunto. Dado $x_0 \in A$ definamos $\delta : 2^A \to [0, \infty]$ por $\delta(E) \equiv \chi_E(x_0)$.

3. Prueba que δ es una medida en A. A δ se le llama la *medida de Dirac concentrada en* x_0.

Sea (Ω, Σ, μ) una medida.

4. Prueba que $E \in \Sigma$ tiene medida cero si, y sólo si, $\chi_E = 0$ c.t.p.

5. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $\mathcal{M}(\Sigma)$. Si $\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} |\, f_n| \, d\mu \ < \ \infty$, prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge c.t.p. y $\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n$.

Definición El *rango esencial* de $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ consiste de todos aquellos $w \in \mathbb{K}$ tales que $\mu(\{x \in \Omega :| w - f(x)| < \epsilon\}) > 0, \ \forall\, \epsilon > 0$; se denotará por $R_{\mathrm{ess}}(f)$.

6. Si $f \in L^\infty(\mu)$, prueba que $R_{\mathrm{ess}}(f)$ es compacto.

7. Si $s \in \ell^{p_0}$ para algún $p_0 \in [1, \infty)$, prueba que $\lim_{p \to \infty} \|s\|_p = \|s\|_\infty$.

8. Determina si la medida de contar (restringida a la σ-álgebra de Borel) es regular en los siguientes casos: i) $A \equiv \mathbb{N}$. ii) $A \equiv \mathbb{R}$.

9. Si $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, prueba que $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$.

10. Sea X un espacio normado y $A, K \subset X$. Si A es cerrado y K compacto. prueba que $A + K$ es cerrado.

11. Sea X un espacio normado y $K, V \subset X$. Si $K \subset V$, K es compacto y V es abierto, prueba que existe $r > 0$ tal que $K + B_r \subset V$.

Definición Denotemos por $\mathcal{S}$ el espacio vectorial formado por las sucesiones en $\mathbb{K}$, esto es, por las funciones $s : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $\|\cdot\|_n : \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ por $\|s\|_n \equiv | s(n)|$.

12. Prueba: i) $\mathcal{F} \equiv \{\|\cdot\|_n\}$ es una familia suficiente de seminormas en $\mathcal{S}$.
ii) Sea $\{s_n\} \subset \mathcal{S}$, $s \in \mathcal{S}$. Luego, $s_n \to s$ si, y sólo si, $s_n(m) \to s(m)$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$. De acuerdo a este resultado se acostumbra llamar a la métrica inducida por $\mathcal{F}$ la métrica de la convergencia puntual en $\mathcal{S}$.
iii) $\mathcal{S}$ es completo.

Para revisar y entregarse el miércoles 4 de marzo, 2009.