ANÁLISIS FUNCIONAL: TAREA 5

Definición Sea Ω un espacio localmente compacto no vacío. Una función $f \in C(\Omega)$ se *anula en infinito*, si para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que $|f(x)| \leq \epsilon, \ \forall x \in \Omega \setminus K$. El conjunto de estas funciones se denotará por $C_0(\Omega)$.

1. Prueba que $C_0(\Omega)$ es un subespacio vectorial cerrado de $BC(\Omega)$.

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida.

2. Sea $\{f_n\} \subset L^p(\mu), \ f \in L^p(\mu)$ y $A \in \Sigma$. Si $f_n \to f$ en L^p y $f_n = 0$ c.t.p en $A, \ \forall n \in \mathbb{N}$, prueba que $f = 0$ c.t.p. en A.

3. Si $f \in L^\infty(\mu)$, prueba que $\|f\|_\infty = \sup\{|w| \colon w \in R_{\text{ess}}(f)\}$.

4. Si $1 \leq p < r \leq \infty$, prueba que $\ell^p \subset \ell^q$ y $\|s\|_q \leq \|s\|_p, \ \forall s \in \ell^p$.

5. Sea Ω un espacio localmente compacto. Determina si una medida de contar (restringida a la σ-álgebra de Borel en Ω) es regular.

6. Sea X un espacio normado y $K, V \subset X$. Si $K \subset V, \ K$ es compacto y V es abierto, prueba que existe $r > 0$ tal que $K + B_r \subset V$.

7. (Construcción de una función en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.) Definamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f = 0$ en $(\infty, 0]$ y $f(x) = \exp(-\dfrac{1}{x^2})$ si $0 < x$. Prueba que $f^{(k)}(0) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Concluye que f es de clase $C^\infty, \ f \geq 0, \ f(x) > 0$ si $x > 0$, y $\text{sop} f = [0, \infty)$.

Definición Sea V un espacio vectorial y $A \subset V$.
a) A es *absorbente*, si para cada $x \in V$ existe $t > 0$ tal que $tx \in A$.
b) El funcional de Minkowski de un conjunto convexo y absorbente $A \subset E$ es $\rho_A(x) \equiv \inf\{t > 0 : \frac{x}{t} \in A\}$.

8. Prueba que $\rho_A(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y), \ \rho(tx) = t\rho(x), \forall x, y \in V, \ t \geq 0$.

9. Prueba: i) $\mathcal{F} \equiv \{\| \cdot \|_n\}$ es una familia suficiente de seminormas en $\mathcal{S}$.
ii) Sea $\{s_n\} \subset \mathcal{S}, \ s \in \mathcal{S}$. Luego, $s_n \to s$ si, y sólo si, $s_n(m) \to s(m), \ \forall m \in \mathbb{N}$.
iii) $\mathcal{S}$ es completo.

Definición Sean $a, b \in \mathbb{R}, \ a < b$. $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ es *absolutamente continua* si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(w_i)| \leq \epsilon$, para cualquier colección finita de intervalos $(w_i, x_i) \subset [a, b]$ que sean disjuntos y satisfagan $\sum_{i=1}^n (x_i - w_i) \leq \delta$.

10. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de clase C^1, prueba que f es absolutamente continua.

Para revisar y entregarse el miércoles 11 de marzo, 2009.