ANÁLISIS FUNCIONAL: TAREA 7

1. Sea Ω un espacio métrico. Prueba que $C_c(\Omega)$ es denso en $C_0(\Omega)$. (Sug.: ten presente el ejercicio 6.2)

2. (Continuación del ejercicio 6.3.) Definamos$F(x) \equiv \psi(\|x\|^2),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ y $a \equiv \int_{\mathbb{R}^n} F d\lambda$. Verifica que F es de clase $C^\infty,\ a > 0$ y determina sop$F$.

3. Sea E un EVT definido mediante la familia suficiente de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in I\}$. Prueba que cada seminorma $\|\cdot\|_\alpha : E \to \mathbb{R}$ es continua.

4. Sea E un EVT. Si $\varphi : E \to \mathbb{K}$ es lineal y $\varphi \neq 0$, prueba que φ preserva abiertos.

5. 5. Sea I un intervalo abierto, $f, g : I \to \mathbb{R}$ y $p \in I$. Si f y g son derivables k veces en p, prueba la fórmula de Leibniz: $(fg)^{(k)}(p) = \sum_{j=0}^{n} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) f^{(j)}(p) g^{(k-j)}(p)$, $(f^{(0)} = f)$.

Definición Una función $f : I \to \mathbb{C}$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto, es *absolutamente continua*, si f es absolutamente continua en cualquier intervalo $[a, b] \subset I$.

6. Prueba que la función valor absoluto es absolutamente continua en $\mathbb{R}$.

7. Prueba que, en ℓ^∞, $e_n \xrightarrow{w} 0$.

Sea (Ω, Σ) un espacio medible.

8. Si E cualquier conjunto y $f : \Omega \to E$, prueba que $\{B \subset E : \varphi^{-1}(B) \in \Sigma\}$ una σ-álgebra en E.

9. Supongamos además que Ω es un espacio topológico y consideremos $\varphi : \Omega \to \Omega$ función medible. Si μ es una medida en Σ, prueba que $\varphi_* \mu$ también lo es.

10. Supongamos que μ es una medida en (Ω, Σ) y sean $f, g\mathcal{M}(\Omega)^+$. Si $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu,\ \forall\, A \in \Sigma$, prueba que $f = g$ c.t.p.

Para revisar y entregarse el miércoles 25 de marzo, 2009.