

ANÁLISIS FUNCIONAL: TAREA 8

1. Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ son de clase C^2 , calcula la segunda derivada de $f \circ g$.

Definición Sean $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ y $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ n -índices. Definimos $\alpha \leq \beta$ si $a_j \leq b_j$, $j = 1, \dots, n$. Además $\alpha! \equiv a_1! \cdots a_n!$.

2. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, β un n -índice y $p \in \mathbb{R}^n$. Si f y g son de clase $|\beta|$, prueba la fórmula de Leibniz: $\partial^\beta(fg)(p) = \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} \partial^\alpha f(p) \partial^{\beta-\alpha} g(p)$.

3. Sean E y F EVT y supongamos que F está definido a partir de la familia suficiente de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in I\}$. Si $T : E \rightarrow F$ es lineal y $\|T\|_\alpha : E \rightarrow [0, \infty)$ es continua, $\forall \alpha \in I$, prueba que T es continuo.

4. Prueba que la función valor absoluto tiene derivada débil en $\mathbb{R}$ y determínala.

5. Sea X un espacio normado y $\{x_n\} \subset V$, donde V es un subespacio de X . Si $x_n \xrightarrow{w} x$, prueba que $x \in \overline{V}$.

Notación Si X es un espacio normado, $B_X \equiv \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.

6. Sea X un espacio normado. Si X es separable, prueba que B_{X^*} con la topología w^* es metrizable. (Sug.: considera el ejercicio 6.4.)

7. Si X es un espacio de Banach reflexivo, prueba que B_X es débilmente compacta.

8. i) Si $s \in \ell^\infty$, prueba que existe $\{x_n\} \subset c_0$ tal que $x_n \xrightarrow{w^*} s$. ii) Concluye que c_0 es w^* -denso en ℓ^∞ .

9. Sean X, Y, Z espacios normados. Si $T \in B(X, Y)$ y $S \in B(Y, Z)$, prueba que $TS \in B(X, Z)$ y $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

10. Sea X un espacio normado. i) Prueba que $\text{Aut}(X)$ es un grupo bajo la composición de operadores. ii) La métrica en $B(X)$ hace de $\text{Aut}(X)$ un espacio métrico. Prueba que, con esta métrica, $\text{Aut}(X)$ es un grupo topológico.

Primer examen parcial: miércoles 8 de abril, 2009.

La tarea es para revisar y entregarse el el miércoles 15 de abril.