ANÁLISIS FUNCIONAL: TAREA 9

Notación $\mathcal{M}(m \times n)$ denotará el espacio de las matrices (reales o complejas) de tamaño $m \times n$ y se identificará con $\mathbb{K}^{mn}$. Así, $\mathcal{M}(m \times n)$ cuenta con la norma euclidiana correspondiente. Como es usual, $\mathcal{M}(n) \equiv \mathcal{M}(n \times n)$.

1. Sea $A \in \mathcal{M}(m \times n)$, $B \in \mathcal{M}(n \times k)$ y $x \in \mathbb{R}^n (= \mathcal{M}(n \times 1))$. Prueba: i) $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$. ii) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. iii) Si $n = m$ y $j \in \mathbb{N}$, entonces $\|A^j\| \leq \|A\|^j$.

2. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto no-vacío y $\varphi \in C_c^\infty(I)$. Prueba que existe $\psi \in C_c^\infty(I)$ tal que $\psi' = \varphi$ si, y sólo si, $\int_I \varphi(x)dx = 0$.

3. Sea E un espacio localmente compacto. Si $K \subset U \subset E$, K es compacto y U es abierto, prueba que existe V abierto tal que $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$ y $\overline{V}$ es compacto.

Definición Sea E un EVT. Un conjunto $A \subset E$ es *acotado*, si para cada abierto $V \subset E$ tal que $0 \in V$, existe $s > 0$ tal que $A \subset tV$, $\forall\, t > s$.

4. Sea E un EVT obtenido a partir de una familia suficiente de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in I\}$. Prueba que $A \subset E$ es acotado si, y sólo si, cada seminorma $\|\cdot\|_\alpha$ es acotada en A.

5. Sea V un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ una seminorma definida en V. Prueba que, para cada $p \in V$ y $r > 0$, la "bola" $\{x \in V : \|x - p\| < r\}$ es un conjunto convexo.

6. Sea E un espacio topológico y G un subgrupo de $Homeo(E)$. Definamos $A : G \times E \to E$ por $A(g, x) = g(x)$. Prueba que A define una acción de G en E.

Para revisar y entregarse el miércoles 22 de abril, 2009.