

## ANÁLISIS FUNCIONAL: TAREA 10

1. Sea  $X$  un espacio topológico Hausdorff. Si  $K \subset X$  es compacto y  $x \in X \setminus K$ , prueba que existen abiertos  $V$  y  $W$ , tales que  $K \subset V$ ,  $x \in W$  y  $V \cap W = \emptyset$ . (Nota que  $V \cap \overline{W} = \emptyset$ .)

**Definición** Sea  $V$  un espacio vectorial. Un conjunto  $A \subset V$  es *balanceado*, si cuando  $x \in A$  y  $|c| \leq 1$ , siempre se cumple que  $cx \in A$ .

2. Sea  $E$  un espacio vectorial topológico. Si  $V \subset E$  es un abierto y  $0 \in V$ , prueba que existe un abierto  $W$  tal que  $0 \in W \subset V$  y  $W$  es balanceado.

3. Sea  $E$  un espacio vectorial topológico. Si  $K \subset E$  es compacto, prueba que  $K$  es acotado.

**Definición** Una colección de conjuntos  $\mathcal{C}$  tiene la *propiedad de intersección finita*, si cualquier intersección finita  $A_1 \cap \dots \cap A_n$ , donde  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ , es no vacía.

4. Sea  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{C} \equiv \{K_\alpha : \alpha \in I\}$  una colección no-vacía de conjuntos compactos en  $X$ . Si  $\mathcal{C}$  tiene la propiedad de intersección finita, prueba que  $\bigcap K_\alpha \neq \emptyset$ .

5. Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto no-vacío y  $u \in L^1_{\text{loc}}$ . Si  $u' = 0$ , prueba que  $u = c$  c.t.p. (Sug.: Fija  $\theta \in C_c(I)$  tal que  $\int_I \theta(x) dx = 0$ , considera  $\varphi - (\int_I \varphi dx) \theta$  y ten presente el ejercicio 9.2.)

6. Sea  $G$  un grupo. Determina si  $G$  con la topología discreta es un grupo topológico.

7. Sean  $V, W$  espacios vectoriales y  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Si  $A \subset W$  es convexo, prueba que  $T^{-1}(A)$  es convexo.

8. Sea  $E$  un espacio de Banach,  $T \in B(E)$  y  $K \subset E$  no vacío, compacto y convexo. Si  $T(K) \subset K$ , prueba que  $T$  tiene un punto fijo.

9. Sea  $X$  un espacio compacto Hausdorff no vacío. Si  $h \in \text{Homeo}(X)$ , prueba que existe una medida de probabilidad en  $X$  que es invariante bajo  $h$ .

Para revisar y entregarse el el miércoles 29 de abril, 2009.