VARIABLE COMPLEJA: TAREA 1

1. i) Procediendo como se definieron las operaciones en $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a partir de las operaciones en $\mathbb{R}$, define la suma y el producto en $H := \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ a partir de las operaciones en $\mathbb{C}$.
ii) Determina si H, con las operaciones anteriores, es un campo. (Justifica tu respuesta.)

2. Sean $w, z \in \mathbb{C}$. Verifica que

$$w^{n+1} - z^{n+1} = (w - z)(w^n + w^{n-1}z + \cdots + wz^{n-1} + z^n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

En particular, si $z \neq 0$ se cumple $1 + z + \cdots + z^{n-1} + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

3. Sean $a, b \in \mathbb{C}$ y definamos $f(z) = az + b, \ \forall\, z \in \mathbb{C}$. Si $a \neq 0$, prueba que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una biyección.

4. Prueba que $\mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Re}(iz), \ \forall\, z \in \mathbb{C}$.

5. Encuentra las partes real e imaginaria de $f(z) := \dfrac{z^2 + iz}{z - i}, \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

6. Prueba que $z \in \mathbb{C}$ es real si, y sólo si, $\overline{z} = z$.

7. Prueba que $w, z \in \mathbb{C}$ son linealmente dependientes (como elementos en el espacio vectorial real $\mathbb{C}$) si, y sólo si, $z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}$.

8. Sea $f(z) = (1 + i)z + 2 - i, \forall\, z \in \mathbb{C}$. Encuentra $f(V)$, siendo $V = V_1(-i)$.

9. Prueba la desigualdad del tríangulo para la función distancia en $\mathbb{C}$.

10. Sea $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n = 3, 4, \ldots$. Demuestra que las raíces n-ésimas de w son los vértices de un polígono regular.

11. Prueba que $|\, e^{-i\theta} - 1| \leq \ \theta, \ \forall\, \theta \in \mathbb{R}$.

Para entregarse el miércoles 30 de enero, 2013