VARIABLE COMPLEJA: TAREA 2

1. Determina cuándo un elemento $(a, b) \in H$ es invertible.

2. Sean $w, z \in \mathbb{C}$. Prueba que $w^2 = z^2$ si, y sólo si, $w = z$ o $w = -z$.

3. Describe geométricamente cómo se obtiene z^{-1} a partir de z, $\forall\, z \neq 0$.

4. Sean $w, z \in \mathbb{C}$. Si $w \neq z$, prueba que

$$\frac{z^n - w^n}{z - w} - nw^{n-1} = (z - w)\sum_{k=1}^{n-1} kw^{k-1}z^{n-k-1},\ n = 2, 3, \ldots.$$

5. Dados $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $a \neq b$, describe geométricamente el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \dfrac{z-a}{z-b} \leq 0\}$.

6. Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$. Encuentra bajo qué condición la ecuación $az + b\overline{z} + c = 0$ tiene exactamente una solución y, cuando así suceda, determínala.

7. Encuentra la imagen de $A := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq Arg(z) \leq \dfrac{\pi}{4},\ 2^{-1} \leq |\, z| \leq 2\}$ bajo la función $f(z) := z^2$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

8. Sea $z \in \mathbb{C}$. Prueba que $e^{mz} = (e^z)^m$, $\forall\, m \in \mathbb{Z}$.

9. Verifica que $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

10. Sea $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n = 3, 4, \ldots$. Demuestra que las raíces n-ésimas de w son los vértices de un polígono regular.

11. Sean $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $a \neq 0$ y $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función definida por $f(z) := az + b$. Prueba que f preserva discos. (Sug.: procede por pasos y considera por separado los casos en que $b = 0$ y $b = 1$.)

12. Sean $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ y $E := \{z \in \mathbb{C} : |\, z - a| + |\, z + a| = 2r\}$. Prueba que $E \neq \emptyset$ si, y sólo si, $|a| \leq r$.

Para revisar y entregarse el viernes 8 de febrero, 2013