VARIABLE COMPLEJA: TAREA 3

1. Prueba la fórmula del binomio de Newton para $(w+z)^n$, donde $w, z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$.

2. Establece la fórmula usual para resolver la ecuación de segundo grado $az^2 + bz + c = 0$, donde $a, b, c \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$.

3. Dados $w, z \in \mathbb{C}$, describe geométricamente el conjunto

$$\{tw + (1-t)z : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Definición Sea V un espacio vectorial y $A \subset V$

a) El conjunto A es *convexo*, si dados $x, y \in A$ y $0 \leq t \leq 1$, se cumple que $tx + (1-t)y \in A$.

b) Una *combinación convexa* de un número finito de puntos $x_1, \dots x_n \in A$, es una combinación lineal $t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n$, donde $0 \leq t_k \leq 1,\ k = 1, \dots, n$, y $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$.

4. Sea V un espacio vectorial. Si $A \subset V$ es convexo, prueba que A contiene a todas las combinaciones convexas de puntos $x_1, \dots, x_n \in A$.

5. Prueba que $\overline{e^z} = e^{\overline{z}},\ \forall\, z \in \mathbb{C}$.

6. Describe la imagen bajo la función coseno de las rectas $\mathrm{Re} z =$ constante e $\mathrm{Im} z =$ constante.

7. Determina cuándo se cumple la igualdad en la desigualdad del triángulo. (Justifica tu respuesta.)

8. En el ejercicio 2.12 supongamos que $r \geq |a|$. Encuentra los valores máximo y mínimo de la función módulo $|\cdot|$ en E.

9. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales y supongamos que existe un índice N tal que $0 \leq a_n \leq b_n, \forall\, n \geq N$. Si $b_n \to 0$, prueba que $a_n \to 0$.

10. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Si ambas sucesiones convergen a cero, prueba que $a_n + b_n \to 0$ y $c\, a_n \to 0$.

11. Sean $\{w_n\}$ y $\{z_n\}$ sucesiones en $\mathbb{C}$ y $w, z \in \mathbb{C}$. Si $w_n \to w$ y $z_n \to z$, prueba que $d(w_n, z_n) \to d(w, z)$.

12. Si $a > 0$, prueba que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Para revisar y entregarse el viernes 15 de febrero, 2013