VARIABLE COMPLEJA: TAREA 4

1. Prueba que $\cos(w+z) = \cos w \cos z - \operatorname{sen} w \operatorname{sen} z, \forall\, w, z \in \mathbb{C}$.

2. Sea V un espacio vectorial y $J \neq \emptyset$. Si $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia de subconjuntos de V que son convexos, prueba que $\cap_{\alpha \in J} A_\alpha$ también es convexo.

3. Si P es un polinomio (complejo) de grado $n \in \mathbb{N}_0$ y $a \in \mathbb{C}$, prueba que P se puede expresar en la forma $P(z) = c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n$, donde $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ y $c_n \neq 0$.

4. Consideremos a $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Dado $w \in \mathbb{C}$, definamos $T_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por $T_w(z) = wz$. i) Verifica que T_w es lineal. ii) Encuentra la matriz M_w de T_w respecto a la base canónica. iii) Prueba que $M_v M_w = M_{vw},\ \forall\, v, w \in \mathbb{C}$.

5. Sea $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ una sucesión. Dada $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definamos la sucesión $\{b_k\}$ por $w_k = z_{\varphi(k)},\ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Si φ es inyectiva y $\{z_n\}$ es convergente, prueba que $\{w_k\}$ también es convergente.

6. Prueba que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

7. Si $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ es una sucesión convergente, prueba que es de Cauchy.

8. Determina para qué valores de $\theta \in \mathbb{R}$ la sucesión $\{e^{in\theta}\}_n \subset \mathbb{C}$ es convergente.(Justifica tu respuesta.)

9. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ series convergentes. Prueba:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(w_n + z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n + \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

10. Sean $a, w, z \in \mathbb{C}$. Si $|\,w - a| > |\,z - a|$, prueba que $\dfrac{1}{w-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$.

11. Sea $\{z_n\}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si, y sólo si las series $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im} z_n$ convergen.

12. Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Para revisar y entregarse el viernes 22 de febrero, 2013