**VARIABLE COMPLEJA: TAREA 5**

1. Dado $n \in \mathbb{N}$, sean $w_1, \ldots, w_n$ las raíces $n$-ésimas de la unidad. Si $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ y $w := \sqrt[n]{z}$, prueba que las raíces $n$-ésimas de $z$ son $ww_1, \ldots, ww_n$.

**Definición** Las funciones coseno y seno hiperbólico, respectivamente, son:

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \ \operatorname{senh}(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \ \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

2. Verifica que $\cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2(z) = 1, \ \forall\, z \in \mathbb{C}$.

3. Sea $V$ un espacio vectorial, $n \in \mathbb{N}$ y $v_1, \ldots v_n \in V$. Prueba que el conjunto de puntos de la forma $t_1 v_1 + \ldots t_n v_n$, donde $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ y $t_1 + \ldots + t_n = 1$, es convexo.

4. Sean $a, b \in \mathbb{C}, \ a \neq 0$. Describe geométricamente el conjunto formado por aquellos puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que $\frac{\operatorname{Im}(z-b)}{a} < 0$.

5. Prueba la ley del paralelogramo en $\mathbb{C}$: $|w+z|^2 + |w-z|^2 = 2|w|^2 + 2|z|^2$.

6. Sean $P$ un polinomio y $a \in \mathbb{C}$. Prueba que $P(a) = 0$ si, y sólo si, existe un polinomio $Q$ tal que $P(z) = (z-a)Q(z)$.

7. Sea $P$ un polinomio de grado 1 y $a \in \mathbb{C}$. Si $P(a) \neq 0$, prueba que para cada $r > 0$ existe $z \in D_r(a)$ tal que $|P(z)| < |P(a)|$.

8. Determina si la sucesión $\{\sqrt[n]{n!}\}$ es convergente. (Justifica tu respuesta.)

**Definición** Una serie de la forma $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} z_n$ *converge*, si las series $\sum_{n=1}^{\infty} z_{-n}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ convergen. En este caso definimos

$$\sum_{n=0}^{-\infty} z_n := \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} \text{ y } \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} z_n := \sum_{n=0}^{-\infty} z_n + \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

**Definición** Para cada $r \in [0,1)$, el *núcleo de Poisson* $P_r$ está definido por $P_r(\theta) := \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} r^{|n|} e^{in\theta}, \ \forall\, \theta \in \mathbb{R}$.

9. Prueba que $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}, \ \forall\, \theta \in \mathbb{R}$. (Sug.: observa que $P_r(\theta) = \operatorname{Re}(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(re^{i\theta})^n$.)

**Definición** Sea $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ una serie en $\mathbb{C}$. Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una biyección, a la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ la llamaremos *reordenamiento* de la serie original.

10. Si una serie en $\mathbb{C}$ converge absolutamente, prueba que cualquiera de sus reordenamientos converge y lo hace al mismo límite que la serie original.

11. Si $P$ es un polinomio y $\operatorname{gr} P > 0$, prueba que $\lim_{|z| \to \infty} |P(z)| = \infty$.

12. Sea $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in D$. Prueba que $f$ es continua en $z_0$ si, y sólo si, sus partes real e imaginaria lo son.

Para revisar y entregarse el viernes 1 de marzo, 2013.
Primer examen parcial: lunes 4 de marzo, 4 PM.