VARIABLE COMPLEJA: TAREA 6

1. Verifica que $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \operatorname{senh} y \cos x$, donde $z := x+iy,\ x, y \in \mathbb{R}$.

2. Sea $P(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$ un polinomio.

i) Si $|z| > M := 1 + 2\,|c_0| + |c_1| + \cdots + |c_{n-1}|$, prueba que $|P(z)| > |P(0)|$.

ii) Si w es una raíz de P, concluye que $|w| \leq M$

3. Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Describe geométricamente el conjunto

$$\{t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3 : t_1, t_2, t_3 \geq 0, t_1 + t_2 + t_3 = 1\}.$$

Definición Sea $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ una serie. Dada una sucesión creciente de números naturales, $n(1) < \ldots < n(k) < n(k+1) < \ldots$, a la serie $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ donde $w_1 = z_1 + \cdots + z_{n(1)},\ w_2 = z_{n(1)+1} + \cdots + z_{n(2)},\ \ldots$, se le llama un *reagrupamiento* de la serie original.

4. Si una serie en $\mathbb{C}$ es convergente, prueba que cualquiera de sus reagrupamientos converge al mismo límite que la serie original.

5. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series en $\mathbb{C}$ tales que $b_n \neq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es absolutamente convergente y la sucesión $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ es acotada, prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.

6. Si P es un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}_0$, prueba que P tiene a lo más n raíces distintas.

7. Sea P un polinomo de grado $n \in \mathbb{N}$. Dados $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, prueba que existe $z \in D_r(a)$ tal que $|P(z)| > |P(a)|$.

8. Prueba la continuidad puntual del producto de funciones continuas.

9. Prueba las propiedades básicas de los conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^k$.

10. Sean A y B conjuntos, $f : A \to B,\ J \neq \emptyset$ y $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ una colección de conjuntos. Prueba que $f^{-1}(\cap_{\alpha \in I} V_\alpha) = \cap_{\alpha \in I} f^{-1}(V_\alpha)$.

11. Prueba que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ es cerrado.

Definición La *frontera* de $A \subset \mathbb{R}^k$ es el conjunto $\overline{A} \cap \overline{A^c}$ y se denotará por $\operatorname{Fr} A$. Observa que $\operatorname{Fr} A$ siempre es cerrado.

12. Prueba que $\overline{A} = A \cup \operatorname{Fr} A, \forall\, A \subset \mathbb{C}$.

Para revisar y entregarse el viernes 8 de marzo, 2013.
Primer examen parcial: lunes 4 de marzo, 4 PM.