

VARIABLE COMPLEJA: TAREA 7

1. Sean $\theta \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{C}$. Si $ce^{-i\theta} \notin \mathbb{R}$, prueba que la ecuación $z + e^{2i\theta}\bar{z} + c = 0$ no tiene solución. (Sug.: multiplícala por $e^{-i\theta}$.)

2. Sean $p \in \mathbb{R}^k$ y $r > 0$. Prueba que $B_r(p)$ es un conjunto convexo.

3. Sean $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, no todos iguales a 0. Si w es una raíz del polinomio $P(z) = z^n + c_1z^{n-1} + \dots + c_n$, prueba que $|w| < 2C$, donde $C := \max\{|c_j|^{\frac{1}{j}} : j = 1, \dots, n\}$. (Sug.: si $|w| \geq 2C$, observa que $|c_j| \leq \frac{|w|^j}{2^j}$, $j = 1, \dots, n$.)

4. (Fracciones parciales) Sea $n \in \mathbb{N}$, P un polinomio de grado menor que n y $a \in \mathbb{C}$. Prueba que la función racional R definida por $R(z) := \frac{P}{(z-a)^n}$ se puede expresar en la forma $R(z) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{(z-a)^j}$, donde $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$.

Definición Una *serie de potencias alrededor de un punto* $a \in \mathbb{C}$ es una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, donde $c_n \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

5. Expresa la función racional R definida por $R(z) := \frac{1}{z}$ como serie de potencias alrededor de $a \neq 0$.

6. Determina si el ejercicio 6.7 es válido para polinomios $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

7. Prueba las propiedades básicas de los conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^k$.

8. Prueba que $\mathbb{R}^k = A^0 \cup \text{Fr } A \cup (A^c)^0$, $\forall A \subset \mathbb{R}^k$.

9. Si $K \subset \mathbb{R}$ es compacto y no vacío, prueba que $\inf K, \sup K \in K$.

Notación Si $w, z \in \mathbb{R}^k$, entonces $[w, z] := \{(1-t)w + tz : 0 \leq t \leq 1\}$.

10. Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, puntos no-colineales, y consideremos el triángulo definido por ellos. Con estos puntos y los puntos medios de los segmentos $[z_1, z_2]$, $[z_2, z_3]$ y $[z_3, z_1]$ se forman cuatro “subtriángulos”. Prueba que el diámetro de cada uno de ellos es la mitad del diámetro original.

11. Sean $K, W \subset \mathbb{R}^k$. Si K es compacto, W es abierto y $K \subset W$, prueba que existe $r > 0$ tal que $V_r(z) \subset W$, $\forall z \in K$.

12. Si P es un polinomio de grado $n \geq 1$, con coeficiente principal c_n , prueba que P se puede factorizar en la forma $P(z) = c_n(z-a_1) \cdots (z-a_n)$, donde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$.

Para revisar y entregarse el viernes 15 de marzo, 2013