VARIABLE COMPLEJA: TAREA 8

1. Encuentra la imagen bajo la función exponencial del tríangulo con vértices en los puntos $0, 1+i$ y $1-i$.

2. Sean $\theta \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{C}$. Si $ce^{-i\theta} \in \mathbb{R}$, prueba que la ecuación $z + e^{2i\theta}\overline{z} + c = 0$ representa una recta. (Sug.: $\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w) = d \in \mathbb{R}\}$ es una recta.)

3. Desarrolla $\frac{1}{(1-z)^2}$ como serie de potencias. (Sug.: observa que $\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{F(z)}{1-z}$, donde $F(z) := \frac{1}{1-z},\ |z| < 1$).

4. Prueba que $\overline{V_r(p)} = B_r(p),\ \forall\, p \in \mathbb{R}^k,\ r > 0$.

5. Sea $K \subset \mathbb{R}^m$. Prueba que $K \subset \mathbb{R}^m$ es compacto si, y sólo si, es compacto relativo.

6. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ un abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}^j$ continua. Si $K \subset \Omega$ es compacto y $f(x) \neq 0,\ \forall\, x \in K$, prueba que existe $a > 0$ y un abierto V tal que $K \subset V \subset \Omega$ y $\|f(x)\| \geq a,\ \forall\, x \in V$.

7. Sea $n \in \mathbb{N}$. Dados n puntos distintos $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{C}$, prueba que existe un único polinomio P de grado $n-1$ tal que $P(a_1) = 1$ y $P(a_j) = 0$ si $j \in \{2, \ldots, n\}$.

8. Sea P un polinomio con coeficientes reales. Prueba:

i) Si $P(a) = 0$, entonces $P(\bar{a}) = 0$.

ii) Si el grado de P es impar, entonces P tiene al menos una raíz real.

Definición Sea $A \subset \mathbb{C}$. Para cada $x \in A$, sea $\mathcal{C}_x$ la colección formada por aquellos conjuntos $B \subset A$ que son conexos y tales que $x \in B$.

9. Prueba que $A_x := \cup_{B \in \mathcal{C}_x} B$ es conexo y observa que $x \in A_x,\ \forall\, x \in A$.

10. Prueba que $V_r(p)^c$ es conexo, $\forall\, p \in \mathbb{R}^k$ y $r > 0$.

11. Sea $A \subset \mathbb{R}^k$. Prueba que $\mathrm{Fr}\, A = \emptyset$ si, y sólo si, $A = \emptyset$ o $A = \mathbb{R}^k$.

12. Pueba que A^a es cerrado, $\forall\, A \subset \mathbb{R}^k$.

Para revisar y entregarse el viernes 12 de abril, 2013