VARIABLE COMPLEJA: TAREA 9

1. Si $A \subset \mathbb{R}^m$ es no-vacío y acotado, prueba que existen $x, y \in \mathrm{Fr}\, A$ tales que $\mathrm{diam}\, A = d(x, y)$.

2. Dados n puntos distintos $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{C}$, y $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$ prueba que existe un único polinomio P de grado $n-1$ tal que $P(a_j) = y_j$, si $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

3. Si P es un polinomio mónico con coeficientes reales, prueba que P se puede expresar en la forma $P(z) = \Pi_{j=1}^{n}(z - a_j)^{n(j)}\Pi_{k=1}^{m}(z^2 + b_k z + c_k)^{m(k)}$, donde $a_j \in \mathbb{R},\ j \in \{1, \ldots, n\}$ y los polinomios de segundo grado tienen coeficientes reales y sus raíces no son reales.

4. Si P es un polinomio de grado menor o igual que n, prueba que existen números $A, B > 0$ tales que $|P(z)| \ \leq \ A + B|z|^n, \ \forall\, z \in \mathbb{C}$.

Definición Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^m$ es *denso* (en $\mathbb{R}^m$), si $\overline{A} = \mathbb{R}$.

5. Prueba que Q^m es denso en $\mathbb{R}^m$.

6. Si $V \subset \mathbb{R}^m$ es abierto, prueba que V se puede expresar como una unión numerable de bolas cerradas.

7. Sean $p, v \in \mathbb{R}^m,\ v \neq 0$, y para cada $t \in \mathbb{R}$ definamos $F(t) := p + tv$. Prueba que F es es un homeomorfismo sobre su imagen.

8. (Véase el ejercicio 8.9.) Sea $A \subset \mathbb{R}^m$. Si $x, y \in A$, prueba que $A_x \cap A_y = \emptyset$ o $A_x = A_y$. Luego, la colección $\{A_x : x \in A\}$ descompone a A en una unión de conjuntos conexos disjuntos, cada uno de los cuales es llamado *componente conexa* de A.

9. Sea $A \subset \mathbb{R}^m$. Prueba que $x \in A^a$ si, y sólo si, existe una sucesión $\{x_n\} \subset A$ tal que $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$ y $x_n \to x$.

10. Sean $D \subset \mathbb{R}^m,\ f : D \to \mathbb{R}^\jmath$ y $p \in D \cap D^a$. Prueba que f es continua en p si, y sólo si, $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

11. Sea P un polinomio que no es constante. Si las raíces de P son reales, prueba que también lo son las de P'. (Sug.: Factoriza a P y observa que la función racional $R := \frac{P}{P'}$ no se anula fuera de $\mathbb{R}$.)

12. Sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un función $\mathbb{R}$-lineal. Si T es holomorfa, prueba que existe $k \in \mathbb{C}$ tal que $T(z) = kz, \ \forall\, z \in \mathbb{C}$.

Para revisar y entregarse el viernes 19 de abril, 2013