VARIABLE COMPLEJA: TAREA 10

Definición Dados $A \subset \mathbb{R}^m$ y $x \in \mathbb{R}^m$, sea $d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$. Observa que $0 \le d(x, A) \le \infty$.

1. Sea $A \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto no vacío y consideremos $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{dist}(x, A)$. Prueba que f es continua.

2. Sea $W \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y $A \subset W$ tal que $A \cap K$ es finito, para cada compacto $K \subset W$. Prueba que A es numerable.

3. Sea $r > 0$. Si $W \subset \mathbb{R}^m$ es un abierto y $B_r(0) \subset W$, prueba que existe $R > r$ tal que $B_R(0) \subset W$.

4. Prueba que todo polinomio preserva conjuntos cerrados.

5. Si P es un polinomio de grado $m \in \mathbb{N}$ y Q es un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ que no tienen raíces en común, prueba que existen polinomios únicos p de grado $m-1$ y q de grado $n-1$ tales que $qP + p\,Q = 1$.

6. Si $W \subset \mathbb{R}^m$ es abierto, prueba que sus componentes conexas también lo son.

7. Si $A \subset \mathbb{R}^m$ es acotado, prueba que A^c tiene exactamente una componente conexa que no es acotada.

8. Prueba el criterio por componentes para la existencia de un límite.

9. Desarrolla el polinomio $P(z) = 4i - 3z^2 + (1+i)z^5$ alrededor de $a = i$.

10. Prueba la regla de la cadena para $f \circ \alpha$ en el caso en que f es una función holomorfa y α una curva.

11. Sea $W \subset \mathbb{C}$ una región y $f \in H(W)$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $f^{(n)} = 0$, prueba que f es un polinomio de grado $\le n-1$.

12. Sea $c(z) := \cos z,\ s(z) := \operatorname{sen} z,\ \forall\, z \in \mathbb{C}$. Verifica: i) $c' = -s$. ii) $s' = c$. iii) $c(0) = 1$. iv) $s(0) = 0$.

Para revisar y entregarse el viernes 26 de abril, 2013.
Segundo examen parcial: lunes 29 de abril, 4 PM.