VARIABLE COMPLEJA: TAREA 11

1. Sean $f, g : D \to \mathbb{R}^j$ y $D \subset \mathbb{R}^m$. Si las funciones f y g son continuas, el conjunto D es denso y $f = g$ en D, prueba que $f = g$.

2. Sea $A \subset \mathbb{R}^m$. Si $x \in A$ y $y \in A^c$, prueba que $[x, y] \cap \operatorname{Fr} A \neq \emptyset$.

3. Si $A \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto acotado y A es infinito, prueba que $A^a \neq \emptyset$.

4. Si $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^j$ es de clase C^1, prueba que existe un número real $M > 0$ tal que $|\alpha(t) - \alpha(s)| \leq M\ |t - s|,\ \forall\, s, t \in [a, b]$.

5. Calcula la derivada de cosh y de senh.

Definición Dados $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $b \in \mathbb{C}$, definimos $a^b := e^{b \operatorname{Log} a}$.

6. Dado $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, calcula la derivada de $f(z) = a^z, \forall\, z \in \mathbb{C}$.

7. Sea $f \in H(\Omega)$. Si Ω es una región y $|f|$ es constante, prueba que f es constante.

8. Sea $f_n : D \to \mathbb{R}^j$ una función acotada, $\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Si $f : D \to \mathbb{R}^j$ y $f_n \xrightarrow{u} f$, prueba que f es acotada y que existe un número real $M > 0$ tal que $\|f_n(x)\|\ \leq M,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in D$.

9. Prueba que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(1+nz^2)}$ converge absolutamente si $z \in \mathbb{C}$ es tal que $nz^2 + 1 \neq 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

10. (Criterio de Cauchy, o de la raíz n-ésima, para convergencia uniforme.) Sea $f_n : D \to \mathbb{R}^j,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Si existe $r \in [0, 1)$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sqrt[n]{\|f_n(z)\|} \leq r,\ \forall\, n \geq N,\ \forall\, z \in D,$$

prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absoluta y uniformemente. (Nota que tomando cada f_n constante se obtiene el criterio para series numéricas.)

11. Señala sucesiones acotadas $\{a_n\}$ y $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ tales que

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n)\ \neq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

12. Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^*$. Si $b \geq 0$, prueba que $\liminf_{n\to\infty} b a_n = b \liminf_{n\to\infty} a_n$ y determina si la propiedad correspondiente también se cumple para el limsup.

Para revisar y entregarse el martes 7 de mayo, 4pm