VARIABLE COMPLEJA: TAREA 12

1. Sea $A \subset \mathbb{R}^m$. Prueba que $\operatorname{dist}(x, A^c) = \operatorname{dist}(x, \operatorname{Fr} A), \ \forall\, x \in A$.

2. Si $A \subset \mathbb{C}$ es no-numerable, prueba que $A^a \neq \emptyset$.

3. Sea $W \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f, g : W \to \mathbb{C}$ funciones con derivadas hasta de orden n. Prueba la fórmula de Leibniz para calcular la n-ésima derivada del producto:

$$(fg)^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(z) g^{(n-k)}(z), \ \forall\, z \in W.$$

4. Si los ceros de un polinomio P están sobre una recta, prueba que también lo están los de P'.

5. Deriva la raíz n-ésima principal, $F(z) := \sqrt[n]{z}, -\pi < \operatorname{Arg}(z) < \pi$.

6. (Criterio de D'Alembert, o del cociente, para convergencia uniforme) Sea $f_n : D \to \mathbb{R}^\jmath, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(x) \neq 0, \ \forall\, x \in D, n \in \mathbb{N}$. Si existe $r \in [0, 1)$ tal que $\frac{\|f_{n+1}(x)\|}{\|f_n(x)\|} \leq r, \ \forall\, n \in N, \ \forall\, x \in D$ y f_1 es acotada, prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente. (Nota que tomando cada f_n constante se obtiene el criterio para series numéricas.)

7. Sean $K \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto compacto, $f_n : K \to \mathbb{C}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ y $f : K \to \mathbb{R}^\jmath$. Si cada función f_n es continua, $f_n \xrightarrow{u} f$ y cada f_n tiene un cero en K, prueba que f también lo tiene.

8. Sea $f_n(z) = e^{-n^2\pi^2 y + \pi n i x}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \ \forall\, z = x + iy$. Sea D el conjunto de $z \in \mathbb{C}$ tales que $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ existe. i) Encuentra D. ii) Prueba que $g : D \to \mathbb{C}$ es continua.

9. Determina si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge uniformemente en D_1.

10. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\} \subset [0, \infty)$. Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente y su límite es positivo, prueba que $\limsup_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \limsup_{n\to\infty} b_n$.

11. Encuentra el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

12. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ y tomemos $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \forall\, z \in D_R$. Prueba que $c_n \in \mathbb{R}, \ \forall\, n \in N_0$, si, y sólo si, $f(x) \in \mathbb{R}, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \cap D_R$.

Para revisar y entregarse el lunes 13 de mayo, 2013