VARIABLE COMPLEJA: TAREA 13

1. Dado $a \in \mathbb{C}$, calcula la derivada de $f(z) = z^a, \forall\, z \in D_A$.

2. Supongamos que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es derivable en $z = 0$, $f'(0) = 0$, y $f(w+z) = f(w)f(z)$, $\forall\, w, z \in \mathbb{C}$. Prueba que $f(z) = e^z$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$. (Sug.: prueba primero que $f' = f$.)

3. Sea D un conjunto y $f_n, g_n : D \to \mathbb{C}$ funciones acotadas, $n \in \mathbb{N}$. Si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen uniformemente, prueba que $\{f_n g_n\}$ también.

4. Para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}z > 1$, definamos (la función zeta de Riemann) $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^z}$. Prueba que ζ es continua.

5. Calcula el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n\, z^n$.

6. Sean $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ dos series de potencias que convergen en un disco D_r, donde $r > 0$. Encuentra el desarrollo de $h := fg$, en términos de los coeficientes $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, como serie de potencias alrededor del origen.

7. Calcula $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

8. Sean W un abierto y $f : W \to \mathbb{C}$ una función que es localmente una serie de potencias. Si $f^{-1}(0)^a \neq \emptyset$, prueba que $f = 0$.

9. Considera la curva $\alpha(t) = (t\,|t|, t^2)$, $\forall\, t \in [-1, 1]$. Prueba que α es de clase C^1 y encuentra su trayectoria.

10. Definamos $y(t) := \begin{cases} t \operatorname{sen} \frac{1}{t}, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$ y $\alpha(t) = (t, y(t))$, $\forall\, t \in [0, 1]$. Verifica que α es una curva que no es rectificable. (Sug.: considera la sucesión definida por $t_{2k+1} = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ y $t_k = \frac{2}{2k\pi}$.)

11. Calcula $\int_\alpha (z^3 + iz^2 - 3)dz$, siendo α la curva definida por el arco de la parábola $y = x^2$ que va del origen a $1 + i$ y el segmento que va de $1 + i$ a $3 + i$.

12. Calcula $F'(a)$, si $F(z) := \displaystyle\int_{c_{a,r}} \frac{(\mathrm{Re}\, w + \mathrm{Im}\, w)dw}{w - z}, \forall\, z$ tal que $|z - a| \neq r$.

Para revisar y entregarse el viernes 24 de mayo, 2013