VARIABLE COMPLEJA: TAREA 14

1. Si $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ es un triángulo, prueba que Δ es compacto.

2. Supongamos que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisface $f'(0) = 1$, y $f(w + z) = f(w)f(z)$, $\forall\, w, z \in \mathbb{C}$. Prueba que $f(z) = e^z$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$. (Sug.: prueba $f' = f$.)

Definición Sea $W \subset \mathbb{C}$ un abierto. Para $f : W \to \mathbb{C}$ de clase C^1 definamos los operadores ∂ y $\overline{\partial}$ por $\partial f := \frac{1}{2}[\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}]$ y $\overline{\partial} f := \frac{1}{2}[\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}]$.

3. Sea $W \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : W \to \mathbb{C}$ de clase C^1. Prueba: i) f es holomorfa si, y sólo si, $\overline{\partial} f = 0$. ii) Si f es holomorfa, entonces $f' = \partial f$.

4. Sea $W \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y $\{f_n\} \subset C(W, \mathbb{R}^\jmath)$. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es una serie convergente de términos positivos y $g : W \to \mathbb{R}^m$ una función tal que $\frac{f_n}{c_n} \overset{cu}{\to} g$. Prueba que $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ define una función continua.

5. Sea $D \subset \mathbb{C}$, $\{f_n\} \subset C(D, \mathbb{R}^\jmath)$, $\{z_n\} \subset D$ y $z \in D$. Si $f_n \overset{u}{\to} f$ y $z_n \to z$, prueba que $f_n(z_n) \to f(z)$.

Definición El *conjunto de convergencia* de una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, consiste de todos aquellos $z \in \mathbb{C}$ donde $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge.

6. Considerando las series de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$ concluye que, aunque tienen igual radio de convergencia, los conjuntos de convergencia de una serie y de su serie derivada pueden ser distintos.

Definición El producto (de Cauchy) de las series complejas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, donde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_j b_{n-j}$.

7. Si las series complejas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergen absolutamente, prueba que su producto $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ también. (Sug.: considera series de potencias.)

8. Sean W un abierto y $f : W \to \mathbb{C}$ una función que es localmente una serie de potencias. Si $f^{-1}(0)^a \neq \emptyset$, prueba que $f = 0$. (Sug.: trata de emplear el resultado “correspondiente” para series de potencias.

9. Sean α_1, α_2 y α_3 curvas en $\mathbb{R}^m$ tales que α_2 le sigue a α_1 y α_3 le sigue a α_2. Prueba que $(\alpha_1 \dot{+} \alpha_2) \dot{+} \alpha_3 = \alpha_1 \dot{+} (\alpha_2 + \alpha_3)$.

10. Prueba que $\ell(\alpha_{\text{op}}) = \ell(\alpha)$, para cualquier curva α en $\mathbb{R}^m$.

11. Sean $a, c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ y $P(z) = a_0 + c_1(z - a) + \cdots + c_n(z - a)^n$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$. Encuentra $\int_\alpha |P(z)|^2 dz$, donde α es la circunferencia con centro en a, radio $r > 0$ y orientada positivamente.

12. Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada. Dado $c \in (a,b)$, definamos $\beta : [c, c+b-a] \to \mathbb{C}$ por $\beta(s) := \begin{cases} \alpha(s), & c \leq t \leq b \\ \alpha(a+s-b), & b \leq b+(b-a) \end{cases}$. Prueba que $\int_\alpha f(z)dz = \int_\beta f(z)dz$, $\forall\, f \in C(\alpha^*, \mathbb{C})$. (Nota que esto indica que la integral sobre una curva cerrada de clase C^1P no depende del punto inicial.)

Para revisar y entregarse el lunes 3 de junio, 4:30 pm