VARIABLE COMPLEJA: TAREA 15

Notación Indicaremos por $\Delta(x,y,z)$ el triángulo de vértices $x,y,z \in \mathbb{R}^m$.

1. Sean $a,b,c \in \mathbb{R}^m$. Si $W \subset \mathbb{R}^m$ es abierto y $\Delta(a,b,c) \subset W$, prueba que existe $\delta > 0$ tal que si $x,y,z \in \mathbb{R}^m$ y $\|x-a\| < \delta, \|y-b\| < \delta, \|z-c\| < \delta$, entonces $\Delta(x,y,z) \subset W$.

Definición a) Sea $W \subset \mathbb{C}$ un abierto. Entonces $\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, para cualquier $f \in C^2(W,\mathbb{C})$. A Δ se le llama el operador *laplaciano* (en W).

b) Sea $W \subset \mathbb{C}$ un abierto. Una función $f \in C^2(W,\mathbb{C})$ es *armónica* si $\Delta f = 0$.

2. Sea W un abierto. Si $f \in H(W)$, prueba que $f, \mathrm{Re} f$ e $\mathrm{Im} f$ son armónicas.

3. Prueba que $s_{a,b} \dot{+} s_{b,c} \dot{+} s_{c,a} \sim s_{b,c} \dot{+} s_{c,a} \dot{+} s_{a,b}, \forall\, a,b,c \in \mathbb{C}$.

4. Sean W una región. Si $f : W \to \mathbb{C}$ es localmente una serie de potencias y f no es constante, prueba que f cumple el principio del módulo máximo (Sug.: véase el ejercicio 6.7).

5. Expresa la función $f(z) := \dfrac{1}{z^2 - z - 2}$ como una serie de potencias alrededor de $z = 0$. (Sug.: expresa $f = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b}$.)

6. Sea $R \in \mathbb{R}^+$ y supongamos que $f : (B_R(0))^c \to \mathbb{C}$ es continua. Para cada $r > R$ sea α_r la curva orientada cuya trayectoria es la semicircunferencia con centro en el origen y que va de $(r,0)$ a $(-r,0)$. Si $\lim_{|z|\to\infty} |zf(z)| = 0$, prueba que $\lim_{r\to\infty} \int_{\alpha_r} f(z)dz = 0$.

7. Sea $W \subset \mathbb{C}$ un abierto convexo. Si $f \in H(W)$ y $K \subset W$ es compacto, prueba que f es de Lipschitz en K.

8. Sea D el dominio de log, la función logaritmo principal. Si $a \in D$, desarrolla log alrededor de a e indica en dónde es válido dicho desarrollo.

Definición Una función F es *extensión* de una función f, si $D(f) \subset D(F)$ y $f(z) = F(z), \ \forall\, z \in D(f)$.

9. Consideremos una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, con radio de convergencia $r \in \mathbb{R}^+$ y sea f su función asociada, definida en su conjunto de convergencia. Supongamos que $W \subset \mathbb{C}$ es abierto y $F : W \to \mathbb{C}$ es una extensión holomorfa de f. Prueba que (el disco cerrado) $B_r(0)$ no está contenido en W.

10. Si P es una función entera que cumple la desigualdad del ejercicio 9.4, prueba que P es un polinomio de grado menor o igual que n.

11. Si f es una función entera y f es de Lipschitz, prueba que f es un polinomio de grado menor o igual que 1.

12. Sea $W = \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ y definamos $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}, \forall\, z \in W$. Prueba: i) f está bien definida. ii) f es holomorfa.

Para revisar y entregarse el lunes 10 de junio, 2013.
Tercer examen parcial: martes 11 de junio, 4 pm.