Lema 1. *Sean* $\{a_n\},\ \{b_n\} \subseteq \mathbb{R}^*$.
i) $\liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n$.
ii) Si existe $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n \le b_n,\ \forall\, n \ge N$, *entonces*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Demostración i) Estableceremos primero que

$$m_k \ \le M_n,\ \forall\, k, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Sean $k, n \in \mathbb{N}$ y tomemos m_n y M_n como en (**??**). Si $k \le n$, entonces $m_k \le m_n \le M_n$. Si $k > n$, resulta $m_k \le M_k \le M_n$. Esto prueba (1).

Fijando n consideremos ahora el supremo sobre k en (1). Después, en la desigualdad resultante tomemos ínfimo respecto de n. Se obtiene entonces la conclusión.

ii) Sea $s = \{a_n\}$ y denotemos por $m_n(s)$ y $M_n(s)$ los números definidos en (**??**); análogamente, sean $m_n(\sigma)$ y $M_n(\sigma)$ los correspondientes a $\sigma = \{b_n\}$. De la hipótesis se sigue entonces que

$$m_n(s) \le m_n(\sigma) \le \liminf b_n, \quad \limsup a_n \le M_n(s) \le M_n(\sigma), \quad \forall\, n \ge N.$$

Siendo $\{m_n(s)\}$ una sucesión monótona creciente, de las desigualdades de la izquierda obtenemos $\limsup m_n(s) = \sup\{m_n(s) : n \in \mathbb{N}\} \le \liminf b_n$. Usando después las desigualdades anteriores de la derecha establecemos que $\limsup a_n \le \limsup b_n$. $\square$

Lema 2. *Sean* $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}^*$ *y* $b \in \mathbb{R}^*$.
i) Si $\limsup_{n\to\infty} a_n < b$, *entonces existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n < b,\ \forall\, n \ge N$.
ii) Si $b < \limsup_{n\to\infty} a_n$, *entonces* $b < a_n$ *para una infinidad de* $n \in \mathbb{N}$.
iii) Si $b < \liminf_{n\to\infty} a_n$, *entonces existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $b < a_n,\ \forall\, n \ge N$.
iv) Si $\liminf_{n\to\infty} a_n < b$, *entonces* $a_n < b$ *para una infinidad de* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración Seguiremos usando la notación introducida en (**??**).
i) Por hipótesis $\limsup_{n\to\infty} a_n < b$, es decir, $\inf\{M_n : n \in \mathbb{N}\} < b$. Esto implica que $M_N < b$ para algún $N \in \mathbb{N}$. Luego,

$$a_n \le M_N < b,\ \forall\, n \ge N.$$

ii) Puesto que $b < \limsup_{n\to\infty} a_n$, se cumple que $b < M_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Entonces $b < M_1$, lo cual implica que existe un índice $n(1) \in \mathbb{N}$ tal que $b < a_{n(1)} \leq M_1$. Repitiendo el argumento anterior con $M_{n(1)+1}$, encontramos $n(2) \in \mathbb{N}$ tal que $n(2) > n(1)$ y $b < a_{n(2)} \leq M_{n(2)}$. Continuando con este proceso se establece lo afirmado.

Lo afirmado en iii) y iv) se establece de forma similar a i) y ii), respectivamente. $\square$

El siguiente resultado indica que los conceptos de $\liminf$ y de $\limsup$ generalizan la noción de límite.

Proposición 1. Sean $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}^*$ y $a \in \mathbb{R}^*$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ si, y sólo si, } \liminf_{n\to\infty} a_n = a = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Demostración Continuaremos empleando la notación introducida en (**??**).

$\Longrightarrow$) Consideremos primero el caso en que $a = \lim a_n \in \mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$. existe un índice N de manera que $|a_n - a| \leq \epsilon$, $\forall\, n \geq N$. Lo cual equivale a

$$a - \epsilon \leq a_n \leq a + \epsilon,\ \forall\, n \geq N.$$

Por el lema 1, esto implica que

$$a - \epsilon \leq \liminf a_n \leq a + \epsilon.$$

Haciendo ahora $\epsilon \to 0$, concluimos que $\liminf_{n\to\infty} a_n = a$. Procediendo de manera análoga se establece que $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$.

Supongamos ahora que $\lim a_n = -\infty$. Dado $C \in \mathbb{R}$, existe entonces un índice N de manera que $a_n \leq C$, $\forall\, n \geq N$. Por el lema 1, esto implica

$$\limsup a_n \leq C,\ \forall\, C \in \mathbb{R}.$$

Se sigue entonces que $\liminf a_n \leq \limsup a_n = -\infty \leq \liminf a_n$.

Cuando $a = \infty$ procedemos de manera similar a la anterior.

$\Longleftarrow$) Consideremos primero el caso en que $a \in \mathbb{R}$. Sea $\epsilon > 0$. Puesto que $a - \epsilon < a = \liminf a_n = \limsup a_n < a + \epsilon$, a partir de i) y de iii) en el lema 2 es posible encontrar $N \in \mathbb{N}$ de manera que

$$a - \epsilon \leq a_n \leq a + \epsilon,\ \forall\, n \geq N.$$

Esto prueba que $\lim a_n = a$.

Supongamos ahora $a = -\infty$. Sea $C \in \mathbb{R}$. Luego, $\limsup a_n = \liminf a_n < C$. Por el lema anterior, esto implica que existe $N \in \mathbb{N}$ de manera que

$$a_n \leq C, \ \forall\, n \geq N.$$

Lo cual indica que $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. El caso en que $a = \infty$ se establece de forma similar. $\square$

4.3. Series de Potencias

Una serie de potencias es una serie de funciones de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

donde $c_n \in \mathbb{C}, \ \forall\, n \in \mathbb{C}$, y $z \in \mathbb{C}$.

La primera cuestión por analizar es la de su convergencia. Claramente, una serie de potencias siempre converge en $z = 0$.

Ejemplo 1. Consideremos la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. En el ejemplo 2.4.**??** se estableció que ésta converge si $|z| < 1$ y diverge si $|z| > 1$.

Fijemos $r \in (0,1)$ y sea z tal que $|z| \ \leq r$. Entonces $|z^n| \ \leq r^n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Puesto que $\sum_{n=0}^{\infty} r^n < \infty$, el criterio M de Weierstrass implica que la serie geométrica converge uniformemente en D_r.

El siguiente resultado establece que el comportamiento de la serie geométrica es típico en lo que se refiere a la convergencia de una serie de potencias.

Notas
Clase 21, abril 4, 2022
Fernando Galaz Fontes