Teorema 1. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ una serie de potencias y definamos

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}, \tag{1}$$

donde $\frac{1}{0} := \infty$ y $\frac{1}{\infty} := 0$.

i) Si $|z| < R$, entonces la serie converge absolutamente. Además, la convergencia es uniforme en B_r, donde $0 < r < R$.

ii) Si $|z| > R$, entonces la serie diverge.

Demostración i) Fijemos $r \in [0, R)$. Probaremos enseguida que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge absoluta y uniformemente en B_r.

Supongamos primero que $\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} < \infty$, lo cual equivale a que $0 < R \le \infty$. Elijamos enseguida ρ tal que $r < \rho < R$. De (1) resulta entonces que $\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R} < \dfrac{1}{\rho}$. Usando ahora i) del lema 2.2 obtenemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $|c_n|^{\frac{1}{n}} \le \dfrac{1}{\rho}$, $\forall\, n \ge N$. Lo cual implica que

$$|c_n||z^n| \le \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \le \left(\frac{r}{\rho}\right)^n, \ \forall\, n \ge N, \ \forall\, z \in B_r.$$

Puesto que $0 < \frac{r}{\rho} < 1$, la desigualdad anterior permite aplicar el criterio M de Weierstrass para concluir lo deseado.

Si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$, entonces $R = 0$ y la conclusión se satisface por vacuidad.

ii) Si $R = \infty$ la conclusión se cumple por vacuidad. Supondremos ahora que $0 \le R < \infty$. Consideremos $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > R$ y fijemos después ρ tal que $R < \rho < |z|$. Luego, $\frac{1}{\rho} < \frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$. En este caso al aplicar ii) del lema 2.2 resulta que existen una infinidad de índices n tal que $\frac{1}{\rho} < |c_n|^{\frac{1}{n}}$, esto es, $\frac{1}{\rho^n} < |c_n|$. Por lo tanto, para tales índices n se satisface

$$|c_n z^n| = |c_n||z|^n > \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \ge 1.$$

Lo cual implica que la sucesión $\{c_n z^n\}$ no converge a cero. Por consiguiente, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ diverge. $\square$

De acuerdo con el teorema anterior, al número $R \in \mathbb{R}^*$ definido por (1) se le llama *radio de convergencia* de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ y D_R es su correspondiente *disco de convergencia*. En el caso en que $R > 0$ a la función f

definida por $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ la llamaremos la *función asociada* a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Observación 1. El radio de convergencia queda también determinado por las condiciones i) y ii) señaladas en el teorema anterior, resultado debido al matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829). La fórmula (1) para el radio de convergencia fue establecida por el matemático francés Jacques S. Hadamard (1865-1963).

Corolario 1. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Entonces:

i) Su función asociada $f : D_R \to \mathbb{C}$ es continua.

ii) Si existe una sucesión $\{w_k\} \subseteq D'_R$ tal que $w_k \to 0$ y $f(w_k) = 0, \forall\, k \in \mathbb{N}$, entonces $c_n = 0, \forall\, n \in I\!N_0$.

Demostración i) Del teorema anterior resulta que $r \leq R$, donde R es el radio de convergencia de la serie. Se sigue que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge casi uniformemente en D_r. Por el corolario 1.3, esto implica que f es continua en D_R.

ii) De la hipótesis y la continuidad de f resulta entonces que $0 = \lim f(w_k) = f(0) = c_0$. Luego,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = z g(z), \tag{2}$$

donde $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}, \forall\, z \in D_r$. Notemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}$ también converge en D_r. Ya que $w_k \neq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$, de (2) concluimos que $g(w_k) = 0, \forall\, k \in \mathbb{N}$. Repitiendo ahora con g lo que hicimos inicialmente con f llegamos a que $c_1 = 0$. Siguiendo con este proceso se obtiene la conclusión. $\square$

Observación 2. Supongamos que dos series de potencias con radio de convergencia positivo, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, coinciden en una sucesión $\{w_k\}$ tal que $w_k \to 0$ y $w_k \neq 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Usando ii), notemos que entonces se obtiene que $a_n = b_n, \forall\, n \in I\!N_0$.

Ejemplo 2.

1. Consideremos la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$. Por la proposición 2.1, resulta

$$\limsup (n^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Su radio de convergencia es entonces $R = 0$ y, por lo tanto, esta serie sólo converge en $z = 0$.

Los siguientes ejemplos muestran que el comportamiento de una serie de potencias en la circunferencia $|z| = R$, siendo R su radio de convergencia, es diverso.

2. Consideremos la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$. Usando la proposición 2.1 y que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, resulta

$$\limsup \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right)^2 = 1.$$

Luego, su radio de convergencia es $R = 1$.

Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \leq 1$. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

De acuerdo al criterio M de Weierstrass, la serie dada converge uniformemente en B_1. En particular, converge en cualquier $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$.

3. Consideremos la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. De acuerdo a lo establecido en el ejemplo 2.4.1, su radio de convergencia es 1 y la serie diverge en cualquier número complejo z tal que $|z| = 1$.

4. Consideremos la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Puesto que

$$\limsup \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

su radio de convergencia es $R = 1$. Cuando $z = 1$ se obtiene la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, la cual no converge. Sea z tal que $|z| = 1$ y $z \neq 1$. Entonces

$$|1 + z + \cdots + z^n| = \frac{|1 - z^{n+1}|}{|1 - z|} \leq \frac{2}{|1 - z|}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ya que $\{\frac{1}{n}\}$ es una sucesión monótona de números positivos que converge a 0, el criterio de Dirichlet permite concluir que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge.

El interés del siguiente resultado radica en que, dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, en ciertos casos la sucesión de cocientes $\left\{ \dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \right\}$ puede ser más sencilla de manejar que la sucesión de raíces n-ésimas $\{ \sqrt[n]{|c_n|} \}$.

Lema 1. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales positivos. Entonces:*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \ \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \ \leq \ \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \ \leq \ \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \qquad (3)$$

Luego, si el límite de $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$ existe, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Demostración Tomemos $r = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$ y $s = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Probaremos primero la desigualdad en la derecha de (3). Si $s = \infty$, la conclusión es clara. Consideremos ahora $0 \leq s < \infty$ y sea $0 < \epsilon < 1$. De acuerdo al lema 2.2 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ \leq \ s + \epsilon, \ \forall\, n \geq N.$$

De aquí resulta

$$a_{N+k} \ \leq \ (s+\epsilon) a_{N+k-1} \ \leq \ \cdots \ \leq \ (s+\epsilon)^k a_N, \ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Tomando $n = N + k$, esto se expresa como

$$a_n \ \leq \ (s+\epsilon)^n (s+\epsilon)^{-N} a_N, \ \forall\, n \geq N.$$

Luego,

$$\sqrt[n]{a_n} \ \leq \ (s+\epsilon) \sqrt[n]{(s+\epsilon)^{-N} a_N}, \ \forall\, n \geq N.$$

Tomando ahora $\limsup$, al usar el lema 2.1 y que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1, \ \forall\, p > 0$, encontramos que

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \ \leq \ s + \epsilon, \ \forall\, \epsilon > 0.$$

Haciendo ahora $\epsilon \to 0$ se obtiene lo deseado.

Ya que la desigualdad de enmedio en (3) es clara, sólo falta establecer la desigualdad en la izquierda. Si $r = 0$, la desigualdad es clara. Consideremos ahora $0 < r \leq \infty$ y tomemos $0 < t < r$. De acuerdo al lema 2.2 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ > \ t, \ \forall\, n \geq N.$$

De aquí, procediendo como en el caso del lím sup, obtenemos

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \geq t.$$

Haciendo ahora $t \to r$ resulta la desigualdad buscada. $\square$

Proposición 1. [Criterio de la razón] Sea $\{c_n\}$ una sucesión en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si $R = \lim_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}|$ existe en $\mathbb{R}^*$, entonces el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ es R.

Demostración Por el lema anterior se cumple

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Se sigue de aquí que R es el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. $\square$

Ejemplo 3. Consideremos la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Puesto que

$$\left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1,$$

del criterio de la razón resulta que su radio de convergencia es $R = \infty$. Así, la correspondencia $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ define una función continua en $\mathbb{C}$.

Notas
Clase 22, abril 6, 2022
Fernando Galaz Fontes