5.4. Derivación de una serie de potencias

Llamaremos *serie derivada* de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, a la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1},$$

que es la serie que se obtiene al derivar término a término la serie original.

Para probar que una serie y su serie derivada tienen el mismo radio de convergencia requeriremos del siguiente resultado.

Lema 1. *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\} \subseteq [0, \infty)$. Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente y su límite es positivo, entonces*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Demostración Tomemos $a = \lim a_n$ y consideremos ϵ tal que $0 < \epsilon < a$. Elijamos enseguida $N \in \mathbb{N}$ de manera que $a - \epsilon \leq a_n \leq a + \epsilon$, $\forall n \geq N$. Siendo $b_n \geq 0$, esto implica que $(a - \epsilon)b_n \leq a_n b_n \leq (a + \epsilon)b_n$, $\forall n \geq N$. Ya que $a - \epsilon > 0$, se sigue que

$$(a - \epsilon) \limsup b_n \leq \limsup a_n b_n \leq (a + \epsilon) \limsup b_n.$$

Haciendo ahora $\epsilon \to 0$ se obtiene la conclusión. $\square$

Lema 2. *Una serie de potencias y su serie derivada tienen el mismo radio de convergencia.*

Demostración Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ una serie arbitraria. Notemos que la serie derivada $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ y la serie auxiliar $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^n$ convergen en los mismos puntos. Por la observación 3.1, esto implica que tienen el mismo radio de convergencia.

Por otra parte, del resultado anterior se obtiene

$$\limsup \sqrt[n]{n|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

De acuerdo a la fórmula de Cauchy-Hadamard, esto implica que la serie auxiliar y la serie dada tienen igual radio de convergencia. $\square$

Teorema 1. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Entonces, su función asociada f es derivable y su derivada se obtiene derivando término a término la serie original, esto es,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}, \ \forall\, z \in D_R.$$

Demostración Para principiar notemos que el lema 2 implica que la serie *segunda derivada*, esto es, la serie derivada de la serie derivada, tiene el mismo radio de convergencia que la serie original.

Consideremos $z \in D_R$ y fijemos en seguida $\rho > 0$ de manera que $|z| < \rho < R$. En adelante, sólo consideraremos aquellos $h \in \mathbb{C}$ tales que $|h| < \rho - |z|$. Se cumple entonces que $|z| + |h| < \rho$.

Obtendremos la conclusión usando el lema 4.1.3. Para esto notemos que

$$\begin{aligned} r(h) = f(z+h) - f(z) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}\right) h & \\ = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n - \left(\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}\right) h & \\ = \sum_{n=1}^{\infty} c_n [(z+h)^n - z^n - n z^{n-1} h]. & \qquad (1) \end{aligned}$$

Esto lleva a estimar la expresión $(z+h)^n - z^n - n z^{n-1} h$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Notando primero que ésta es 0 cuando $n = 1$, en adelante consideraremos $n \geq 2$.

Sea $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. De la fórmula del binomio de Newton llegamos a que

$$\begin{aligned} |(z+h)^n - z^n - n z^{n-1} h| &\leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |h|^k |z|^{n-k} \\ &= |h|^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |h|^{k-2} |z|^{n-k} \end{aligned}$$

Teniendo ahora presente que para los coeficientes binomiales se cumple

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \binom{n-2}{k-2} \leq n(n-1) \binom{n-2}{k-2}, 2 \leq k \leq n,$$

encontramos que

$$\begin{aligned}
|(z+h)^n - z^n - nz^{n-1}h| &\leq n(n-1)|h|^2 \sum_{k=2}^{n} \begin{pmatrix} n-2 \\ k-2 \end{pmatrix} |h|^{k-2}\ |z|^{n-k} \\
&\leq n(n-1)|h|^2 \sum_{j=0}^{n-2} \begin{pmatrix} n-2 \\ j \end{pmatrix} |h|^{j}\ |z|^{n-2-j} \\
&\leq n(n-1)|h|^2(|z| + |h|)^{n-2} \\
&\leq |h|^2 n(n-1)\rho^{n-2},\ \forall\, n \geq 2. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Tomemos $C = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\ |c_n|\ \rho^{n-2} < \infty$. Sustituyendo (2) en (1) obtenemos entonces que

$$|r(h)| \leq C|h|^2,\ \forall\, h \text{ tal que } |h| < \rho - |z|\ .$$

Esto implica que $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. □

El siguiente resultado se obtiene aplicando varias veces el teorema anterior

Corolario 1. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ Entonces, su función asociada f tiene derivadas de todos los órdenes y

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n z^{n-k},\ \forall\, z \in D_R,\ \forall\, k \in \mathbb{N}. \qquad (3)$$

En particular,

$$f^{(k)}(0) = k!\ c_k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Luego, f se puede expresar como

$$f(z) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n,\ \forall\, z \in D_R.$$

Proposición 1.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,\ \forall\, z \in \mathbb{C}. \qquad (4)$$

Demostración Sea f la función asociada a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. De acuerdo al ejemplo 2.3, el radio de convergencia de la serie anterior es $R = \infty$. Luego, la función f es entera y $f'(z) = 1 + z + \ldots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots = f(z),\ \forall\, z \in \mathbb{C}$.

Introduzcamos en seguida la función auxiliar $h(z) = f(z)e^{-z}$. Empleando la fórmula para derivar un producto, la regla de la cadena y utilizando que $f'(z) = f(z), (e^z)' = e^z$, se obtiene

$$h'(z) = f'(z)e^{-z} - f(z)e^{-z} = 0,\ \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Siendo $\mathbb{C}$ un región, el corolario 1 implica que $f(z)e^{-z} = f(0)e^0 = 1$. Luego, $f(z) = e^z,\ \forall\, z \in \mathbb{C}$. $\square$

Observación 1. En nuestro desarrollo hemos supuesto conocida la función exponencial, así como las funciones trigonométricas cos y sen. La introducción usual de estas funciones es de forma geométrica, basada en la circunferencia unitaria. La proposición 1 proporciona una alternativa completamente analítica. En efecto, podemos empezar definiendo la función exponencial como (4) y después

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen} z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ \forall\, z \in \mathbb{C},$$

como se hizo en la sección 1.3. En este marco el número π se define como $2a$, donde a es el primer cero positivo de la función coseno.

Notas
Clase 23, abril 25, 2022
Fernando Galaz Fontes