5.5. Funciones que son localmente series de potencias

En un capítulo más adelante estableceremos que cualquier función holomorfa es localmente una serie de potencias, lo cual motiva el estudio de este tipo de funciones que a continuación haremos.

Definición 1.
a) A una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, donde $a \in \mathbb{C}$ y $\{c_n\} \subseteq \mathbb{C}$, la llamaremos serie de potencias *alrededor de* a o *con centro en* a.

b) Sea $W \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Una función $f : W \to \mathbb{C}$ es *es localmente una serie de potencias* (l. s. p.), si para cada $a \in W$ existe $r > 0$ tal que en $D_r(a) \subseteq W$, la función f se expresa como una serie de potencias alrededor de a.

Ejemplo 1. Si P es un polinomio, el lema 3.4.2 indica que P es un función que es localmente una serie de potencias. En este sentido podemos considerar a este tipo de funciones como una generalización de los polinomios.

Derivabilidad

Corolario 1. Sea $W \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Si $f : W \to \mathbb{C}$ es localmente una serie de potencias, entonces f tiene derivadas de todos los órdenes. Más especificamente, si $a \in W$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ en $D_r(a)$, entonces

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n \cdots (n-k+1)c_n(z-a)^{n-k}, \ \forall\, z \in D_r(a), \forall\, k \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

En particular,

$$f^{(k)}(a) = k!\ c_k, \ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, f también se puede indicar como

$$f(z) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \ \forall\, z \in D_r(w).$$

A esta fórmula se le llama *desarrollo en serie de Taylor de* f alrededor de a.

Demostración Fijemos $a \in W$. Por hipótesis, existen $r > 0$ y una sucesión $\{c_n\} \subseteq \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ en $D_r(a)$. Definamos

$$g(h) = f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h^n, \ \forall\, h \in D_r.$$

y denotemos por R el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n h^n$. De acuerdo al corolario 4.1, g tiene derivadas de todos los órdenes en D_R. Ya que $r \leq R$, esto mismo se cumple en D_r. Puesto que $f(z) = g(z-a)$, por la regla de la cadena resulta que $f^{(k)}(z) = g^{(k)}(z-a)\ \forall\, z \in D_r(a)$. De aquí se sigue que la función f tiene derivadas de todos los órdenes en el disco $D_r(a)$ y que se cumple (1). Las dos afirmaciones restantes son consecuencia de esta igualdad. $\square$

Observación 1. Notemos que el resultado anterior implica que si f es localmente una serie de potencias, entonces f y todas sus derivadas son continuas.

Ceros

Sea W un conjunto. Dada una función $f : W \to \mathbb{C}$, a aquellos números $z \in W$ que satisfacen la ecuación $f(z) = 0$ los llamaremos *ceros* de f. Surge entonces la cuestión de conocer ¿qué tan "grande" puede ser $f^{-1}(0)$"?, el conjunto de ceros de f. El siguiente resultado proporciona una respuesta en el caso en que W es una región y f es localmente una serie de potencias.

Teorema 1. Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ y $f : W \to \mathbb{C}$. Si W es una región, f es localmente una serie de potencias y $f \neq 0$, entonces $f^{-1}(0)^a \cap W = \emptyset$.

Demostración El punto fundamental de la prueba es analizar el conjunto $A = \{z \in W : f^{(n)}(z) = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}_0\}$. Como primer paso veamos que

$$f^{-1}(0)^a \cap W \subseteq A. \tag{2}$$

Consideremos $w \in f^{-1}(0)^a \cap W$. Ya que f es localmente una serie de potencias, existen $r > 0$ y $\{c_n : n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{C}$ tales que $D_r(w) \subseteq W$ y

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-w)^n, \ \forall\, z \in D_r(w).$$

Usando que $w \in f^{-1}(0)^a$, encontramos una sucesión de puntos distintos $\{z_k\} \subseteq D'_r(w) \cap f^{-1}(0)$ tal que $z_k \to w$. Procediendo ahora como se hizo en la prueba del corolario 3.1, resulta que $c_n = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Lo cual implica que $f^{(n)}(w) = n!c_n = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, $w \in A$. Esto prueba (2).

Estableceremos a continuación que

$$A \text{ es abierto y cerrado en } W. \tag{3}$$

Sea $z \in A$ y elijamos $r > 0$ tal que $D_r(z) \subseteq W$ y f se exprese como una serie de potencias en $D_r(z)$. Puesto que $f^{(n)}(z) = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}_0$, del corolario 1 se sigue que todos los coeficientes de esta serie de potencias son 0. Por lo tanto $f = 0$ en $D_r(z)$ y entonces $D_r(z) \subseteq A$. Esto prueba que A es abierto.

Tomemos ahora una sucesión $\{z_k\} \subseteq A$ y supongamos que $z_k \to z$, donde $z \in W$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Ya que $f^{(n)}$ es continua y $f^{(n)}(z_k) = 0$, esto implica que $f^{(n)}(z) = 0$. Por lo tanto, $z \in A$. Esto prueba que A es cerrado en W.

Siendo W un conjunto conexo, de (3) concluimos que $A = W$ o $A = \emptyset$. Si $f^{-1}(0) \cap W \neq \emptyset$, de (2) resulta que $A \neq \emptyset$ y entonces $A = W$. En consecuencia $f = 0$. Con esto concluimos la demostración. $\square$

Aplicando el teorema anterior a $f - g$ se obtiene la siguiente consecuencia.

Corolario 2. Sean W una región, $f, g : W \to \mathbb{C}$ funciones l. s. p. y $A = \{z \in W : f(z) = g(z)\}$. Si $A^a \cap W \neq \emptyset$, entonces $f = g$.

A continuación estudiaremos conjuntos A tales que $A^a \cap W = \emptyset$, como los considerados en el teorema 1.

Definición 2. Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Un punto $a \in A$ es un *punto aislado* en A, si existe $r > 0$ tal que $D_r(a) \cap A = \{a\}$.

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C}$. Entonces, que $a \notin A^a$ significa que existe $r > 0$ tal que $D'_r(a) \cap A = \emptyset$. De esto se sigue que $D_r(a) \cap A \subseteq \{a\}$. Luego,

$$a \in A \setminus A^a \text{ si, y sólo si, } a \text{ es un punto aislado en } A.$$

Lema 1. *Sean $W \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $A \subseteq W$. Si $A^a \cap W = \emptyset$ entonces:*

i) A consiste únicamente de puntos aislados.

ii) A es numerable.

iii) $A \cap K$ es finito, para cualquier conjunto compacto $K \subseteq W$.

iv) Si W es una región, entonces también $W \setminus A$ es una región.

Demostración Ya que $A^a \cap W = \emptyset$, para cada $w \in W$, es posible elegir $r(w) > 0$ tal que $D'_{2r(w)}(w) \cap A = \emptyset$. Luego

$$D_{2r(w)}(w) \cap A = \emptyset \text{ si } w \in W \setminus A, \quad D_{2r(w)}(w) \cap A = \{w\} \text{ si } w \in A. \tag{4}$$

i) La conclusión se sigue inmediatamente de la afirmación anterior.

ii) Sean $w, y \in A$ y, sin perder generalidad, supongamos que $r(y) \leq r(w)$. Si existe $z \in D_{r(w)}(w) \cap D_{r(y)}(y)$, entonces $|y-w| \leq |y-z|+|z-w| < 2r(w)$. Luego, $y \in D_{2r(w)} \cap A = \{w\}$. Por consiguiente, $y = w$. Se sigue que

$$D_{r(w)}(w) \cap D_{r(y)}(y) = \emptyset, \text{ si } w \neq y. \tag{5}$$

A partir de la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, para cada $w \in A$ escojamos un punto $p_w \in (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap D_{r(w)}(w)$. La condición (5) implica que la correspondencia $w \to p_w$ es inyectiva. Ya que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable, esto permite concluir que A es numerable.

iii) Sea $K \subseteq W$ un conjunto compacto. Notando que la colección de abiertos $\{D_{2r(w)}(w) : w \in K\}$ es una cubierta de K, obtenemos puntos $w_1, \ldots, w_n \in A$ tales que $K \subseteq D_{2r(w_1)}(w_1) \cup \ldots D_{2r(w_n)}(w_n)$. En virtud de (4), esto implica que

$$K \cap A \subseteq (D_{2r(w_1)}(w_1) \cap A) \cup \ldots (D_{2r(w_n)}(w_n) \cap A)$$

es finito.

Notas
Clase 24, abril 29, 2022
Fernando Galaz Fontes